Suite exercice 82 page 266

Soit $f$ la fonction définie pour tout réel $x$ par :

$$f(x) = (1+x)e^{-x}.$$

**1. a.** Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

**b.** Déterminer les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

**c.** Tracer la courbe représentative de la fonction $f$ sur l'intervalle $[1;5]$.

**2.** On note $(I_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $I_n = \int_1^n f(x)\,dx$.

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de $I_n$ en fonction de $n$.

**a.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $I_n \geqslant 0$.

**b.** Montrer que la suite $(I_n)$ est croissante.

**3. a.** On considère la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par $F : x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{-x}$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des réels. Déterminer les réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $F$ soit une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**b.** En déduire $I_n$ en fonction de $n$.

**c.** Déterminer la limite de $I_n$. Donner une interprétation graphique de cette limite.

$(uv)' = u'v + uv'$

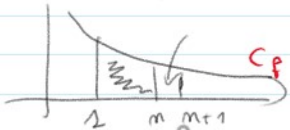
⚠ Sur $[1;+\infty[$, $f$ est décroissante.

2b) $I_n = \int_1^n f(x)\,dx$ est une suite croissante.

$I_{n+1} = \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^n f(x)\,dx + \int_n^{n+1} f(x)\,dx$

positive sur $[n, n+1]$ (cf Q 1)

$I_{n+1} = I_n + \text{qté} \oplus$




3a) $F(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$

F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ signifie que pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$.

$F'(x) = \alpha \times e^{-x} + (\alpha x + \beta) \times (-e^{-x}) = e^{-x}(\alpha - \alpha x - \beta)$

$= e^{-x}(-\alpha x + \alpha - \beta)$

$F' = f \iff$ pour tout $x$ réel $e^{-x} \times (-\alpha x + \alpha - \beta) = e^{-x} \times (1 + x)$

$\iff -\alpha x + (\alpha - \beta) = 1 + 1x$.

Par identification, on a : $-\alpha = 1$, $\alpha - \beta = 1$ $\iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = \alpha - 1 = -1 - 1 = -2 \end{cases}$

F est une primitive ssi $F(x) = (-x-2)e^{-x}$ pour $x$ réel.

b) $I_n = \int_1^n f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_1^n = F(n) - F(1) = (-n-2)e^{-n} - (-3)e^{-1}$

$= (-n-2)e^{-n} + 3e^{-1}$

c) $I_n = \underbrace{(-n-2)}_{-\infty}\underbrace{e^{-n}}_{0} + 3e^{-1}$ $\qquad e^{-n} = \frac{1}{e^n}$ $\qquad \lim_{n \to +\infty} e^n = +\infty$

Brouillon

Forme indéterminée : grâce au th. des croissances comparées, $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$

$I_n = -\frac{n}{e^n} - \frac{2}{e^n} + 3e^{-1}$ ; de plus $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{e^n} = 0$

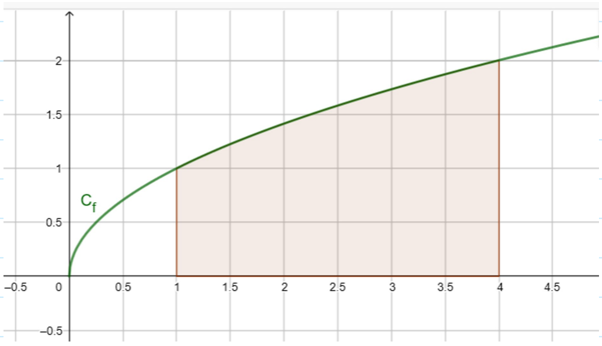
Par somme $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0 + 0 + 3e^{-1} = 3e^{-1}$.

L'aire du domaine par la courbe $C_f$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ vaut $3e^{-1} = \frac{3}{e}$ u.a.

Exercice 51 page 262

On considère la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{x}.$$




**1.** Tracer sur une feuille à grands carreaux (carrés de 0,8 cm de côté) l'allure de la courbe représentative de $f$ en prenant comme unité 2 grands carreaux sur chaque axe.

**2.** On pose $I=\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

**a.** En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I=7-\frac{1}{2}I.$$

**b.** Déterminer la valeur de $I$.

**3.** En déduire l'aire, en cm$^2$, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x=1$ et $x=4$, et la courbe représentative de $f$.

2) $I=\int_1^4 \sqrt{x}\,dx=\left[x\sqrt{x}\right]_1^4-\int_1^4 \frac{x}{2\sqrt{x}}\,dx$

$\begin{cases} u(x)=\sqrt{x} & u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ v'(x)=1 & v(x)=x \end{cases}$

$u, v, u', v'$ sont continues sur $[1;4]$

$I=\left(4\sqrt{4}-1\sqrt{1}\right)-\int_1^4 \frac{1}{2}\sqrt{x}\,dx$ car $\frac{x}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}\times\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}}=\sqrt{x}$

$I=7-\frac{1}{2}\underbrace{\int_1^4\sqrt{x}\,dx}$ par linéarité de l'intégrale

$\boxed{I=7-\frac{1}{2}I}$

b) $I+\frac{1}{2}I=7$ soit $\frac{3}{2}I=7$ ou $I=\frac{14}{3}$

c) aire $=\frac{14}{3}$ u.a $=\frac{14}{3}\times 1{,}6\times 1{,}6=\frac{14}{3}\times\frac{8}{5}\times\frac{8}{5}=\frac{896}{75}\approx 11{,}95\text{ cm}^2$

1,6 cm = 1 unité en abscisse

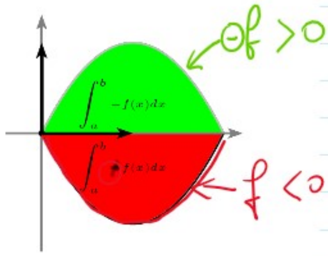
Cours

### 4.1. Calcul d'aires

**Fonction négative**

**Propriété 9.**

si $f(x) \leqslant 0$ sur $[a;b]$, on pose $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b -f(x)dx$ : l'intégrale correspond alors à l'opposé de l'aire au dessus de la courbe.




$\int_a^b -f(x)dx$ = aire du domaine vert

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b -(-f(x))dx$

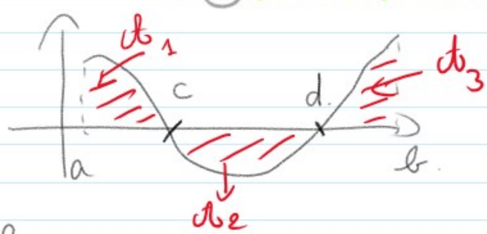
$= -\int_a^b -f(x)dx$

$= -$ aire du domaine vert

**Fonction de signe quelconque**

**Propriété 10.**

$\int_a^b f(x)dx$ correspond à l'aire délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et la courbe $C_f$, comptée **positivement** lorsque $C_f$ est au-dessus de l'axe des abscisses et **négativement** lorsque $C_f$ est en dessous.



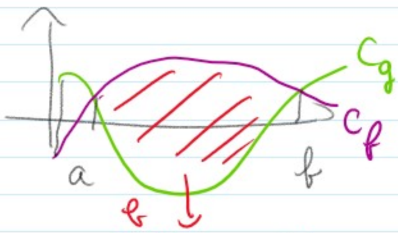

$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3$

### 4.2. Aire entre deux courbes

**Théorème 11.**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ (donc $a \leqslant b$) telles que sur cet intervalle on ait : $g \leqslant f$. L'aire du plan limitée par les courbes de $f$ et de $g$ ainsi que les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée en unités d'aires par :

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x.$$




$\int_a^b f(x) - g(x)\, dx$

Test wooclap : OXNQAZ

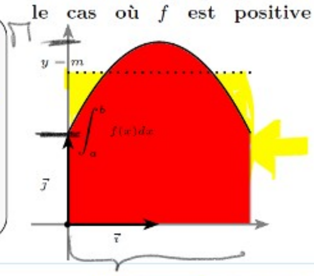
### 4.3. Valeur moyenne

**Définition 3.**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ $(a < b)$
La **valeur moyenne** de $f$ sur $[a;b]$ est le nombre $m$ défini par :

$$\boxed{m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

**Illustration graphique dans le cas où $f$ est positive :**




$(b-a) \times m = \int_a^b f(x)dx$

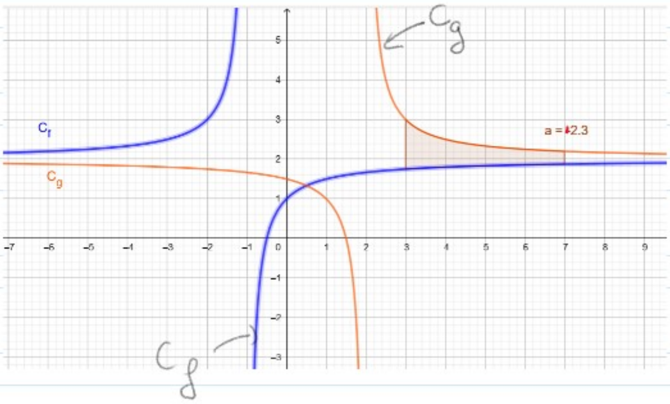
Exercice 83 page 266

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies sur $[3;7]$ par :

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{2x-3}{x-2}.$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

• Calculer l'aire, en cm$^2$, du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x=3$ et $x=7$.




Etude des positions relatives de $C_f$ et $C_g$

$$g(x)-f(x)=\frac{2x-3}{x-2}-\frac{2x+1}{x+1}$$

$$g(x)-f(x)=\frac{2x-3}{x-2}\times\frac{x+1}{x+1}-\frac{2x+1}{x+1}\times\frac{x-2}{x-2}$$

$$=\frac{(2x-3)(x+1)-(2x+1)(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{2x^2+2x-3x-3-(2x^2-4x+x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{2x-1}{(x-2)(x+1)}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0{,}5$ | | $2$ | | $3$ $7$ $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $2>0$ |
| $(x-2)(x+1)$ | | $+$ | $0$ | | $-$ | | $0$ | $+$ | |
| $g(x)-f(x)$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $\vert$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

signe de $a=1$
car $(x-2)(x+1)=1x^2-x-2$

Sur $[3;7]$, $g(x)-f(x)>0$

$g(x)>f(x)$

$$\mathcal{A}=\int_3^7 g(x)-f(x)\,dx=\int_3^7\frac{2x-1}{(x-2)(x+1)}\,dx=\int_3^7\frac{2x-1}{x^2-x-2}\,dx=\Big[\ln\left(x^2-x-2\right)\Big]_3^7$$

$u(x)=x^2-x-2$
$u'(x)=2x-1$

$\dfrac{2x-1}{x^2-x-2}$ forme $\dfrac{u'}{u}$

⚠ $x^2-x-2>0$ sur $[3;7]$

$$\mathcal{A}=\ln(40)-\ln 4=\ln\left(\frac{40}{4}\right)=\ln 10\simeq 2{,}3 \text{ u.a}$$

$$\mathcal{A}=4\times\ln 10\simeq 9{,}21 \text{ cm}^2$$

car 1 u = 2 cm donc 1 u.a $=2^2=4$ cm$^2$

# Valeur moyenne

Exercice 45 page 261

Calculer la valeur moyenne de la fonction exponentielle sur l'intervalle $[0;2]$. En donner une valeur approchée au centième.

Par définition, $m = \dfrac{1}{2-0} \times \displaystyle\int_0^2 e^x \, dx$

$m = \dfrac{1}{2} \times \left[ e^x \right]_0^2 = \dfrac{1}{2}\left(e^2 - e^0\right) = \dfrac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)$

$m \approx 3,19|4$

$m \approx 3,19$

Exercice 58 page 262

**Calculer**

Calculer les intégrales suivantes.

1. $I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$
2. $J = \int_0^1 \frac{t^4}{(t^5+1)^3}dt$
3. $K = \int_1^2 \frac{1}{(1+x)^2}dx$
4. $L = \int_0^1 x^2 e^{x^3}dx$

1) forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^{-x}+1 > 0$

$u'(x) = -e^{-x}$

$I = -\int_0^1 \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = -\left[\ln(e^{-x}+1)\right]_0^1$

$I = -\ln(e^{-1}+1) + \ln(2) = \ln\left(\frac{2}{e^{-1}+1}\right)$

2) forme $\frac{u'}{u^n}$ Primitive de $\frac{u'}{u^n}$ est du type : $-\frac{1}{(n-1)} \times \frac{1}{u^{n-1}}$

$u(t) = t^5+1$ ; $u'(t) = 5t^4$. et $n = 3$

$J = \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{5t^4}{(t^5+1)^3}dt = \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{2} \times \frac{1}{(t^5+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{5} \times \left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{40}$

3) $K = \int_1^2 \frac{1}{(1+x)^2}dx$ forme : $\frac{u'}{u^2}$. Primitive de $\frac{u'}{u^2}$ est de la forme : $-\frac{1}{u}$

$u(x) = 1+x$

$u'(x) = 1$

$K = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_1^2 = -\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

4) $L = \int_0^1 x^2 e^{x^3}dx$ forme : $u' \exp u$ avec $u(x) = x^3$ ; $u'(x) = 3x^2$.

Primitive de $u'e^u$ est $e^u$

$L = \frac{1}{3}\int_0^1 3x^2 e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\left[e^{x^3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}$