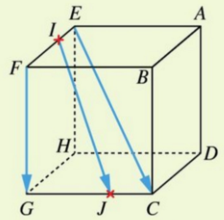
Fin exercice 69 page 336

vendredi 27 novembre 2020 13:17

ABCDEFGH est un cube dessiné ci-dessous.



Les points I et J vérifient : $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$.

On veut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont coplanaires.

1. Méthode vectorielle

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$. Conclure.

2. Méthode analytique

Le plan est rapporté au repère $(G\,;\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GF})$.

a. Donner, sans justifier, les coordonnées des points G, C, H, F, E, I et J.

b. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$.

c. Montrer que ces vecteurs sont coplanaires.

2) a) Dans le repère $(G\,; \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GF})$:

$G(0;0;0)$ $C(1;0;0)$ $H(0;1;0)$ $F(0;0;1)$ $E(0;1;1)$

$I(0;\frac{2}{3};1)$ $J(\frac{2}{3};0;0)$

b) $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 2/3-0 \\ 0-2/3 \\ 0-1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{GJ} - \overrightarrow{GI}$

$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

×0

×1

c) Les coord de $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$ ne sont pas proportionnelles donc $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$ ne sont pas colinéaires. On cherche donc s'il existe 2 nb réels a et b tq $\overrightarrow{IJ} = a\overrightarrow{EC} + b\overrightarrow{FG}$

$L_1 + L_2$ donne $0 = 0$

$$\times(-1)\begin{cases} 2/3 = a\times 1 + b\times 0 & L_1 \\ -2/3 = a\times(-1) + b\times 0 & L_2 \\ -1 = -1\times a + b\times(-1) & L_3 \end{cases} \begin{cases} 2/3 = a \\ -2/3 = -a \\ -1 = -\frac{2}{3} - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2/3 \\ a = 2/3 \\ -1 + \frac{2}{3} = -b = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2/3 \\ b = +1/3 \end{cases}$$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$ ou $\overrightarrow{IJ}$ est combinaison linéaire des vect. $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$

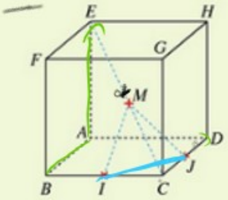
donc $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont coplanaires.

Exercice 73 page 337

vendredi 27 novembre 2020 13:19

73 (50 min)

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.
On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes $[BC]$ et $[CD]$.
Soit M un point quelconque du segment $[CE]$.
Dans tout l'exercice, on se place dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



1. a. Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.
b. On admet l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$ tel que les coordonnées du point M soient $(1-t\,;1-t\,;t)$.
Lorsque $t = 0{,}5$, quelle position particulière occupe le point M dans le cube ? Ici démo
2. On admettra que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M et que :

$$IM^2 = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$

Le but de cette question est de déterminer la position du point M sur le segment $[CE]$ pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ est maximale.
On désigne par θ la mesure, en radian, de l'angle $\widehat{IMJ}$.
a. En admettant que la mesure θ appartient à l'intervalle $[0\,;\pi]$, démontrer que la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal.
b. En déduire que la mesure est maximale lorsque la longueur IM est minimale.
c. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$

d. En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment $[EC]$ telle que la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ soit maximale.

1a) $C(1\,;1\,;0)$; $E(0\,;0\,;1)$; $I(1\,;\frac{1}{2}\,;0)$

b) $M(x;y;z) \in [CE] \iff \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CE}$ sont colinéaires de même sens et longueur $CM <$ longueur CE

$\iff$ il existe un réel t de $[0;1]$ tq $\overrightarrow{CM} = t \times \overrightarrow{CE}$.

$CM \leq CE$
$t \times CE \leq CE$ $\quad) \div CE$
$t \leq 1$

$\iff \begin{cases} x-1 = -1 \times t \\ y-1 = -1 \times t \\ z = 1 \times t \end{cases}$ avec $t \in [0;1]$ $\iff \begin{cases} x = -t+1 \\ y = -t+1 \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in [0;1]$

représentation paramétrique de $[CE]$

En remplaçant t par 0,5, on a :
$x = 0{,}5$; $y = 0{,}5$; $z = 0{,}5$ donc M est le centre du cube

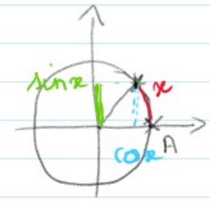
2) $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-\frac{1}{2} \\ z-0 \end{pmatrix}$ $\quad IM^2 = (x-1)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + (z-0)^2$

$IM^2 = (-t)^2 + \left(-t+1-\frac{1}{2}\right)^2 + t^2$

$IM^2 = t^2 + \left(-t+\frac{1}{2}\right)^2 + t^2$

$IM^2 = t^2 + t^2 - t + \frac{1}{4} + t^2 = 3t^2 - t + \frac{1}{4}$

2a)

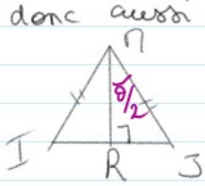


θ maximal $\iff \frac{\theta}{2}$ maximal

* $0 \leq \theta \leq \pi$
$0 \leq \theta/2 \leq \pi/2$

la fct sinus est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Lorsque $\sin\frac{\theta}{2}$ est maximal, $\frac{\theta}{2}$ (qui appartient à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$*) est aussi maximal et donc aussi θ



$\theta = \widehat{MIJ}$ dans le triangle RMJ rectangle en R,

$\sin \widehat{RMJ} = \frac{RJ}{MJ} = \frac{\frac{1}{2} IJ}{IM}$ ← c^{st}

$\sin \widehat{RMJ} = \sin\frac{\theta}{2}$ est maximal lorsque IM est minimal

2b quand M varie sur $[CE]$, IM varie aussi et le problème revient à chercher le minimum de IM

c) $f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}$ $\qquad$ ou $f'(t) = 6t - 1$

trinôme du 2^{nd} degré : $a = 3$; $b = -1$ et $c = \frac{1}{4}$ $\quad|\quad$ fct affine qui s'annule pour $t = \frac{1}{6}$

trinôme du 2nd degré : $a = 3$; $b = -1$ et $c = \frac{1}{4}$.

t	0	$\frac{1}{6}$	1
f		↘ ↗	

$-\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{6} = \frac{1}{6}$

$f'(t)$ affine qui s'annule pour $t = \frac{1}{6}$ et est $+$ si $t > \frac{1}{6}$ (signe de 6 à droite de la racine)

t	0		$1/6$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

d) Il existe une unique point pour laquelle IM est minimale, losque $t = 1/6 \rightarrow M_0(1-1/6 ; 1-1/6 ; 1/6)$ soit $(5/6 ; 5/6 ; 1/6)$ en remplaçant t par $1/6$ dans la représentat° paramétrique de (CE).