ExercicesIPP

Exercice 29 page 260

En utilisant une intégration par parties, calculer :

$$\int_1^e x\ln(x)\,dx.$$

$$\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x & v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

u et v sont des fonctions dérivables sur $[1;e]$ et u' et v' sont continues sur $[1;e]$

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \times \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}e^2 - 0 - \int_1^e \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

$$\int uv' = [uv] - \int u'v$$

Exercice 73 page 264

1. Soit x un réel. Déterminer $f(x) = \int_0^x t\cos(t)\,dt$ à l'aide d'une intégration par parties.

2. Déterminer la dérivée de la fonction f.

3. En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto x\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v'(t) = \cos t & v(t) = \sin t \end{cases}$$

u, v sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et u', v' continues sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = [t\sin t]_0^x - \int_0^x 1 \times \sin t\,dt.$$

$$f(x) = x\sin x - 0\sin 0 - [(-)\cos t]_0^x = x\sin x + \cos x - 1$$

2) D'après le théorème fondamental d'intégration f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = x\cos x.$$

3) La fonction qui à x associe $x\sin x + \cos x$

Exercices double IPP

Exercice 74 page 265

On considère les intégrales :

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x} \cos(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x} \sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. En effectuant deux intégrations par parties successives, démontrer que $C = \frac{1+\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$.

2. a. En utilisant la démonstration précédente, exprimer S en fonction de C.

b. En déduire la valeur de S.

$$\begin{cases} u(x) = e^{-x} \\ v'(x) = \cos x \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = -e^{-x} \\ v(x) = \sin x \end{cases}$$

u, v, u', v' sont continues sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

$$C = \left[e^{-x} \times \sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -e^{-x} \times \sin x \, dx$$

$$* \; C = \left(e^{-\pi/2} \times 1 - 0\right) + \underbrace{\int_0^{\pi/2} e^{-x} \sin x \, dx}$$ donc $C = e^{-\pi/2} + S$

$$\begin{cases} u(x) = e^{-x} \\ v'(x) = \sin x \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = -e^{-x} \\ v(x) = -\cos x \end{cases}$$

u, v, u', v' sont continues sur $[0; \pi/2]$

$$C = e^{-\pi/2} + \left[e^{-x} \times (-\cos x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-e^{-x}) \times (-\cos x) \, dx$$

$$= e^{-\pi/2} + \underbrace{e^{-\pi/2} \times 0} - 1 \times (-1) - \int_0^{\pi/2} e^{-x} \cos x \, dx$$

$$C = e^{-\pi/2} + 1 - C$$

$C + C = e^{-\pi/2} + 1$ donc $2C = e^{-\pi/2} + 1$ soit $\boxed{C = \frac{e^{-\pi/2} + 1}{2}}$

2) $C = S + e^{-\pi/2}$

3) $\frac{e^{-\pi/2} + 1}{2} = S + e^{-\pi/2}$ donc $S = \frac{e^{-\pi/2} + 1}{2} - e^{-\pi/2} \times \frac{2}{2} = \frac{1 - e^{-\pi/2}}{2}$

Exercice 70 page 264

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}\,dt$.

1. Calculer u_1.

2. Simplifier puis calculer $u_0 + u_1$.

3. En déduire la valeur de u_0.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_n + u_{n+1} = \frac{e^n - 1}{n}$.

5. Calculer les valeurs exactes de u_2, u_3 et u_4.

6. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}(e^t - 1)}{1+e^t}\,dt$.

7. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

1) $u_1 = \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = \left[\ln(1+e^t)\right]_0^1 = \ln(1+e) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

$u(t) = 1+e^t$ donc $u'(t) = e^t$

avec $u(t) > 0$.

2) $u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{e^0}{1+e^t}\,dt + \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$

$= \int_0^1 \frac{1}{1+e^t} + \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = \int_0^1 \frac{1+e^t}{1+e^t}\,dt$

$= \int_0^1 1\,dt = [t]_0^1 = 1 - 0 = 1$

$u_0 + u_1 = 1$.

3) $u_0 = 1 - u_1 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

4) $u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}\,dt + \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t}\,dt = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t} + \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t}\,dt$

$= \int_0^1 \frac{e^{nt} + e^{(n+1)t}}{1+e^t}\,dt = \int_0^1 \frac{e^{nt} + e^{nt} \times e^t}{1+e^t}\,dt = \int_0^1 \frac{e^{nt}(1+e^t)}{1+e^t}\,dt = \int_0^1 e^{nt}\,dt$

$= \left[\frac{1}{n} \times e^{nt}\right]_0^1 = \frac{1}{n} e^n - \frac{1}{n} \times e^0 = \frac{e^n - 1}{n}$

5) $u_1 + u_2 = \frac{e^1 - 1}{1}$ donc $u_2 = \frac{e^1 - 1}{1} - u_1 = \frac{e^1 - 1}{1} - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

$u_2 + u_3 = \frac{e^2 - 1}{2}$ ...

6) $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t}\,dt - \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}\,dt = \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t} - e^{nt}}{1+e^t}\,dt = \int_0^1 \frac{e^{nt}(e^t - 1)}{1+e^t}\,dt$.

7) Signe de $u_{n+1} - u_n$?

La fct exp est strict. positive sur $\mathbb{R}$. donc pour tout réel t, $e^{nt} > 0$ et $1+e^t > 0$

$0 \leq t \leq 1$ donc $e^0 \leq e^t \leq e$ d'où $e^t - 1 \geq 0$.

(fct exp. ↗ sur $\mathbb{R}$)

$\frac{e^{nt}}{1+e^t} > 0$ et $e^t - 1 \geq 0$. De plus, $0 < 1$, $\int_0^1 \frac{e^{nt}(e^t-1)}{1+e^t}\,dt \geq 0$

et pour tout naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$

(u_n) est croissante.

Exercice 82 page 266

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (1+x)e^{-x}.$$

1. a. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

c. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[1; 5]$.

2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_1^n f(x)\,dx$.

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

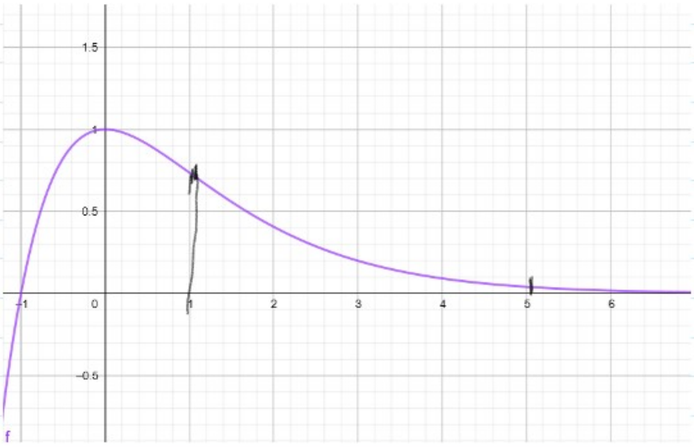
a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $I_n \geqslant 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

3. a. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F : x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{-x}$ où α et β sont des réels. Déterminer les réels α et β tels que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire I_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de I_n. Donner une interprétation graphique de cette limite.



1) Pour tout x réel, e^{-x} est strictement positif

Si $x < -1$: $1+x < 0$ et $f(x) < 0$

Si $x > -1$ $1+x > 0$ et $f(x) > 0$.

2) $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (1+x) \times (-1) \times e^{-x}$

$= e^{-x}(1 - 1 - x)$

$= -x e^{-x}$.

$f'(x)$ a m̂ signe que $(-x)$ donc sur $]-\infty, 0]$, $f'(x) > 0$ et f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $[0; +\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $[0; +\infty[$

2a) Sur $[1; n]$, $f(x) > 0$ et $1 < n$ donc $\int_1^n f(x)\,dx \geqslant 0$

b) $I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} f(x)\,dx - \int_1^n f(x)\,dx = \int_1^n f(x)\,dx + \int_n^{n+1} f(x)\,dx - \int_1^n f(x)\,dx$

$= \int_n^{n+1} f(x)\,dx$. or $f(x) \geqslant 0$ sur $[-1; +\infty[$ donc sur $[n; n+1]$

donc $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$ et (I_n) est croissante.