30 **1.** Dans l'espace muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1\,;0{,}5\,;2)$, $B(0\,;2\,;0{,}5)$, $C(3\,;2{,}5\,;7)$ et $D(3\,;-2{,}5\,;1)$.

a. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

b. Le point A appartient-il à la droite (BD) ?

2. On considère les points $E(1\,;0{,}5\,;4)$ et $F(-3\,;-2\,;1)$.

a. Les points A, B, D et E sont-ils coplanaires ?

b. Le point F appartient-il au plan (ABD) ?

Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-1\\2-0{,}5\\0{,}5-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix}$ $\quad \times -2 \quad \times -\frac{10}{3}$

coord de B $-$ coord de A

les coord de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles donc les vect. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc A, B, C non alignés.

b) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}$ $\quad \times(-2) \quad \times\frac{2}{3}$

de même, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires

donc $A \notin (BD)$

2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une base pour le plan (ABD)

b) $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-4\\-2{,}5\\-1\end{pmatrix}$ donc on cherche s'il existe une combinaison linéaire des 3 vecteurs

ou s'il existe 2 réels x et y tq $\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -1\times x + 2\times y & L_1\\ -2{,}5 = 1{,}5\times x + (-3)\,y & L_2\\ -1 = -1{,}5\times x + (-1)\,y & L_3+L_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -x+2y\\ -2{,}5 = 1{,}5x - 3y\\ -3{,}5 = 0x - 4y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -x+2y\\ -2{,}5 = 1{,}5x - 3\times\frac{7}{8}\\ \frac{7}{8} = y = 0{,}875\end{cases}$$

$L3 \div (-4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -x+2y\\ -\frac{5}{2}+\frac{21}{8} = \frac{3}{2}x\\ \frac{7}{8} = y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2}{3} = x\\ \frac{7}{8} = y\end{cases}$$

On vérifie $-x+2y = -\frac{2}{3}+2\times\frac{7}{8} = -\frac{8}{12}+\frac{7}{4} = \frac{13}{12} \neq -4$.

donc $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires ou $F \notin (ABD)$

a) A, B, D, E coplanaires ? $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ On cherche s'il existe a et b des réels tq $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$.

$$\begin{cases} 0 = -1\times a + 2\times b\\ 0 = 1{,}5\times a + (-3)\times b & L_2\\ 2 = -1{,}5\times a + (-1)\times b & L_3+L_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -a+2b\\ 0 = 1{,}5a - 3b\\ 2 = -4b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+2b = 1+2\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 0\\ 0 = \frac{3}{2}a - 3\times\left(\frac{1}{2}\right)\\ b = -\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow a = (-1)$$

donc $\overrightarrow{AE} = -1\times\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ sont coplanaires donc $\overrightarrow{AE} = -1 \times \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ sont coplanaires

et $\boxed{E \in (ABD)}$

Exercice32page329

mercredi 25 novembre 2020 10:58

Dans l'espace muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix}$.

1. a. Calculer les coordonnées du vecteur :

$$\vec{u}-3\vec{v}+2\vec{w}.$$

b. Peut-on en déduire que ces trois vecteurs sont non coplanaires ?

2. a. Calculer les coordonnées du vecteur :

$$2\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}.$$

b. Que peut-on déduire ?

3. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

1.a) $\vec{u}-3\vec{v}+2\vec{w}$ a pour coord

$$\begin{pmatrix}-1-3\times1+2\times3\\2-3\times2+2\times(-2)\\-3-3\times(-3)+2\times3\end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix}2\\-8\\12\end{pmatrix}$$

b) On ignore, à partir de ces coord, s'il existe une combinaison linéaire entre ces 3 vecteurs

2a) $2\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$ $\begin{pmatrix}2\times(-1)-1+3\\2\times2-2-2\\2\times(-3)+3+3\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

donc $2\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$ ou $\vec{w}=\vec{v}-2\vec{u}$

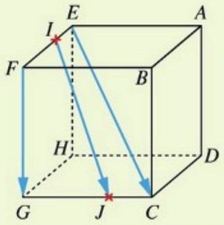
3.) Comme $\vec{w}=\vec{v}-2\vec{u}$, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

Tte droite dirigée par $\vec{w}$ est parallèle aux plans dirigés par $\vec{v}$ et $\vec{u}$.

Exercice 69 page 336

mercredi 25 novembre 2020   10:59

ABCDEFGH est un cube dessiné ci-dessous.



Les points I et J vérifient : $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$.

On veut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont coplanaires.

1. Méthode vectorielle

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$. Conclure.

2. Méthode analytique

Le plan est rapporté au repère $(G\,;\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GF})$.

a. Donner, sans justifier, les coordonnées des points G, C, H, F, E, I et J.

b. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$.

c. Montrer que ces vecteurs sont coplanaires.

1) Méthode vectorielle :   *relat de Chasles

$\overrightarrow{IJ} \overset{*}{=} \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$ $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF}\right) + \overrightarrow{FG} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FC}\right)$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FC}$

opposés

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{EC} + \frac{3}{3}\overrightarrow{FG} - \frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$ $\overrightarrow{IJ}$ est combinaison linéaire des 2 autres $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$

donc $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{FG}$ coplanaires

2 a) $(G\,; \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GF})$: $G(0;0;0)$ $C(1;0;0)$ $H(0;1;0)$ $F(0;0,1)$

$E(0;1;1)$ I (