Exercice 30 page 329

30 **1.** Dans l'espace muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1 ; 0{,}5 ; 2)$, $B(0 ; 2 ; 0{,}5)$, $C(3 ; 2{,}5 ; 7)$ et $D(3 ; -2{,}5 ; 1)$.

a. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

b. Le point A appartient-il à la droite (BD) ?

2. On considère les points $E(1 ; 0{,}5 ; 4)$ et $F(-3 ; -2 ; 1)$.

a. Les points A, B, D et E sont-ils coplanaires ?

b. Le point F appartient-il au plan (ABD) ?

1

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 2 - 0{,}5 \\ 0{,}5 - 2 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -1 \\ 1{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\times(-2)$ $\times\frac{-10}{3}$

coord de B — coord de A

Les coord de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles
donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires
donc A, B, C ne sont pas alignés.

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 1{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\times(-2)$ $\times\frac{2}{3}$

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires
donc A, B, D ne sont pas alignés

2) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ non colinéaires donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ forment une base
donc on cherche s'il existe 2 réels x et y tq $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$

$$\begin{cases} 0 = -1 \times x + 2y \\ 0 = 1{,}5 \times x - 3y \\ 2 = -1{,}5 \times x - 1y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ 0 = 1{,}5 \times 2y - 3y = 0y = 0 \\ 2 = -1{,}5 \times 2y - y = -4y \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \times (-0{,}5) = -1 \\ 0 = 0 \\ y = \frac{2}{-4} = -0{,}5 \end{cases}$$

Par csq^{ce} $\overrightarrow{AE} = -1 \times \overrightarrow{AB} - 0{,}5\,\overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ sont coplanaires
A, B, E, D sont coplanaires

b) $F \in (ABD)$?? On cherche si $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ sont coplanaires ou s'il existe 2 réels x et y tq $\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} -3 - 1 \\ -2 - 0{,}5 \\ 1 - 2 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} -4 \\ -2{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -4 = -x + 2y \\ -2{,}5 = 1{,}5x - 3y \\ -1 = -1{,}5x - y \quad L_2 + L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -4 = -x + 2y \quad L_1 \\ 2{,}5 = 1{,}5x - 3y \\ -3{,}5 = -4y \end{cases} \iff \begin{cases} -4 = -x + \frac{7}{4} \\ -2{,}5 = 1{,}5x - 3y \\ y = \frac{3{,}5}{4} = \frac{7}{8} = 0{,}875 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 4 + \frac{7}{4} = \frac{23}{4} \\ 1{,}5 \times \frac{23}{4} - 3 \times \frac{7}{8} = \frac{69}{8} - \frac{21}{8} = \frac{48}{8} = 6 \neq -2{,}5 \\ y = \frac{7}{8} \end{cases}$$

Le système n'a pas de solutions
donc $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires
donc $F \notin (ABD)$

Exercice 32 page 329

32 Dans l'espace muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix}$.

1. a. Calculer les coordonnées du vecteur :

$$\vec{u} - 3\vec{v} + 2\vec{w}.$$

b. Peut-on en déduire que ces trois vecteurs sont non coplanaires ?

2. a. Calculer les coordonnées du vecteur :

$$2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}.$$

b. Que peut-on déduire ?

3. Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

1)a) $\vec{u} - 3\vec{v} + 2\vec{w}$ a pour coord $\begin{pmatrix}-1-3\times1+2\times3\\2-3\times2+2\times(-2)\\-3-3\times(-3)+2\times3\end{pmatrix}$

soit $\begin{pmatrix}2\\-8\\12\end{pmatrix}$

b) on ignore s'il existe 2 nb x et y tq $\vec{u} = x\vec{u} + y\vec{v}$ on ne peut pas dire si les 3 vecteurs st non coplanaires à partir de $\vec{u} - 3\vec{v} + 2\vec{w} \neq 0$

2a) $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ $\begin{pmatrix}-2-1+3\\4-2-2\\-6+3+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ soit $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$

ou $\underbrace{2\vec{u} + \vec{w}} = \underbrace{\vec{v}}$

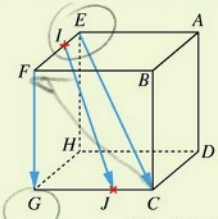
donc $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires.

mercredi 18 novembre 2020 11:54

Exercice 69 page 336

69 (45 min)

ABCDEFGH est un cube dessiné ci-dessous.



Les points I et J vérifient : $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$.

On veut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont coplanaires.

1. Méthode vectorielle

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$. Conclure.

2. Méthode analytique

Le plan est rapporté au repère $(G\,;\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GF})$.

a. Donner, sans justifier, les coordonnées des points G, C, H, F, E, I et J.

b. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$.

c. Montrer que ces vecteurs sont coplanaires.

1) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GJ}$ (relation de Chasles)

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$

$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF}) + \overrightarrow{FG} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FC})$ relat° de Chasles

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{EC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FC}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{FG} - \frac{2}{3}\overrightarrow{FG} + \frac{2}{3} \times (\underbrace{\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FC}}_{\vec{0}})$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$.

$\overrightarrow{IJ}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$
donc $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{FG}$ sont coplanaires

2) $G(0;0;0)$ $C(1;0;0)$ $H(0;1;0)$ $F(0;0;1)$

$\overrightarrow{GH} = 0\,\overrightarrow{GC} + 1\,\overrightarrow{GH} + 0\,\overrightarrow{GF}$; $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GF} = 0\,\overrightarrow{GC} + 1\,\overrightarrow{GH} + 1\,\overrightarrow{GF}$ $E(0;1;1)$

$I(0;\frac{2}{3};1)$; $J(\frac{2}{3};0;0)$