mardi 15 décembre 2020 17:33

Exercice du cours 2 :

Exemple On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$.
f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$, pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\,;\,1]$, la courbe $(\mathcal{C})$ est au-dessus de la droite (D) la droite d'équation $y = x$ sur $]0\,;\,1[$.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n), \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

WEB

Pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ et on obtient :

On a démontré que :

pour tout naturel n : $\boxed{\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1}$

donc la suite (u_n) est croissante

et elle est majorée par 1

Par théorème, (u_n) converge vers ℓ avec $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$

De plus, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue donc

ℓ vérifie : $\ell = f(\ell)$

On a montré que $f(x) - x = \dfrac{(1-x)\left(e^x - (x+1)\right)}{e^x - x}$ pour tout x de $[0;1]$

$f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff \begin{cases} 1 - x = 0 \text{ ou } \underbrace{e^x - (x+1)}_{} = 0 \\ \text{et } e^x - x \neq 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 1 \text{ ou } e^x = (x+1) \\ \text{et } e^x \neq x \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = 0 \\ \text{et } e^x \neq x \end{cases}$ (abscisse du point de contact de $C_{\exp}$ et de sa tg^{te} en 0)

Comme $\ell \geq \frac{1}{2}$: $\ell = 1$ donc (u_n) converge vers 1

Exercice 59 page 135

mercredi 16 décembre 2020 11:06

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x+9 & \text{si } x<-3 \\ 3-x & \text{si } x\geqslant -3 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en -3 ?

2. La fonction f est-elle dérivable en -3 ? On reviendra à la définition de la dérivabilité pour la justification.

3. Interpréter graphiquement les résultats précédents.

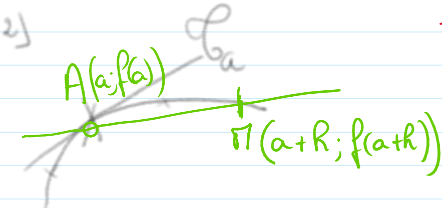
1) $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -3\\<}} x+9 = -3+9 = 6$

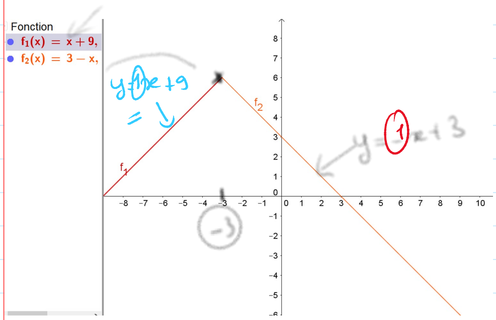
$\lim\limits_{\substack{x\to -3\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -3\\>}} 3-x = 3-(-3) = 6$

$\lim\limits_{\substack{x\to -3\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -3\\>}} f(x) = f(-3)$

f est continue en -3

f est cont. sur $\mathbb{R}$ ($f(x)$ affine par intervalle + continuité en -3)





2) $\mathcal{C}_a$

$A(a;f(a))$

$M(a+h;f(a+h))$

f est dérivable en a ssi $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie.

$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\>}} \frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\>}} \frac{3-(-3+h)-6}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\>}} \frac{-h}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\>}} -1$

$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\>}} \frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = -1$

$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\<}} \frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\<}} \frac{-3+h+9-6}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\<}} \frac{h}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\<}} 1 = 1$

les limites sont différentes donc f n'est pas dérivable en -3.

dérivable en a $\Longrightarrow$ continue en a

continue en a $\not\Longrightarrow$ dérivable en a

3) $\mathcal{C}_f$ n'a pas de tangente en -3.

Rappel : $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ en posant $h = x-a$, $h+a = x$.

TP1 page 126

mardi 15 décembre 2020 18:26

Méthode de Newton-Raphson ALGO PYTHON

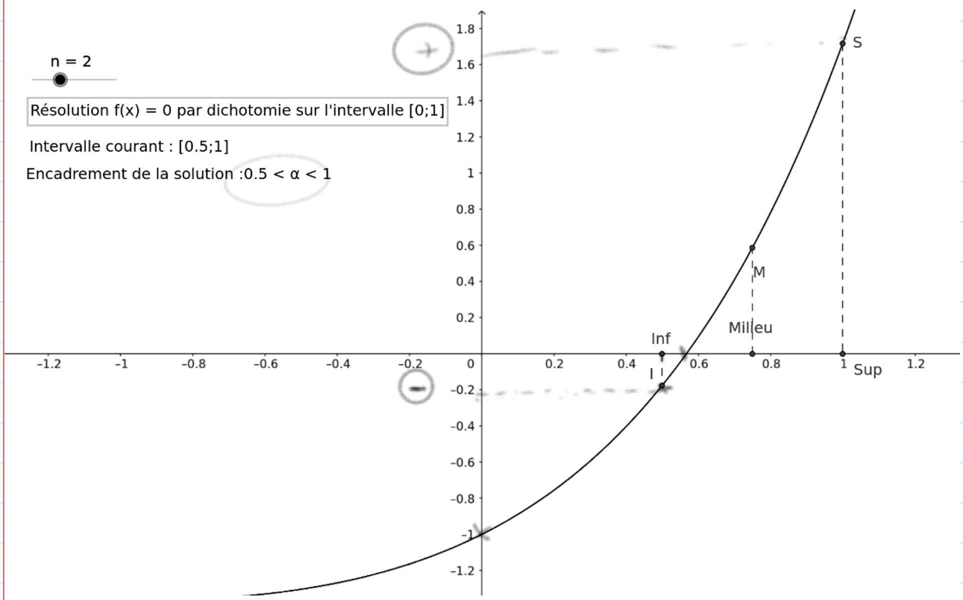
Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = xe^x - 1$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
On souhaite comparer la rapidité de deux algorithmes de calcul d'une valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Une première méthode
On considère la fonction Python ci-dessous.

```
def méthode_1(a,b,n):
    for i in range(n):
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<0:
            b=m
        else :
            a=m
    return [a,b]
```

répetition n fois des instruct°

la fonction : méthode 1
a 3 arguments a, b et n
* a et b sont les bornes de l'intervalle.
* n correspond au nb de fois où l'on découpe l'intervalle en 2
Cette méthode est la méthode par dichotomie.

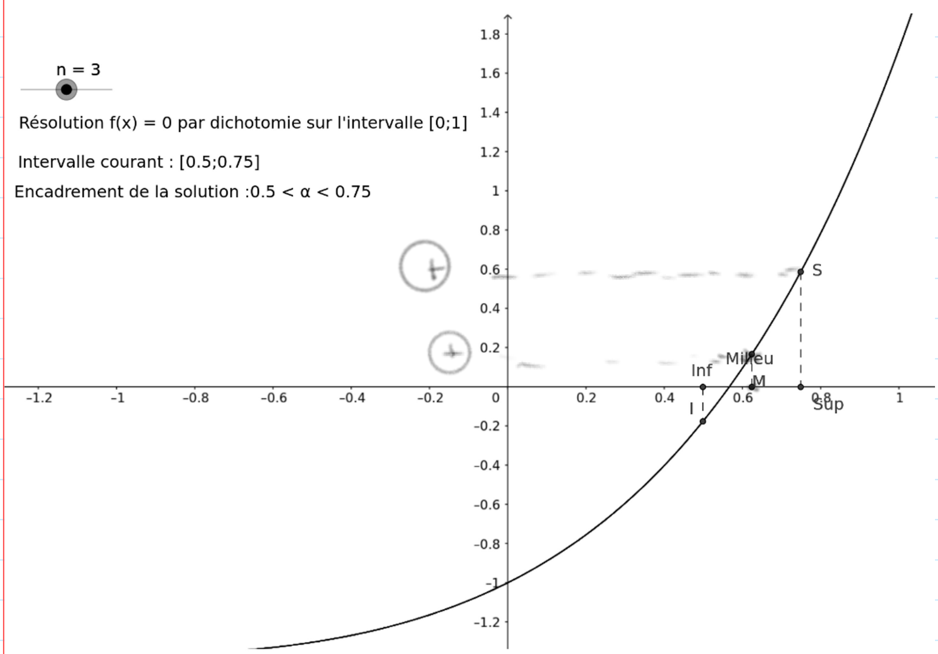


$f(x) = xe^x - 1$
α solu° de l'éq°
$xe^x - 1 = 0$

à l'unité près. $0 < \alpha < 1$

$\left.\begin{array}{l} \alpha \notin [0;0,5] \\ \alpha \in [0,5;1] \end{array}\right\} 0,5 < \alpha < 1$

$\frac{1+0,5}{2} = 0,75$



$f(0,5) < 0$
$f(0,75) > 0$
donc $0,5 < \alpha < 0,75$

$\frac{0,5+0,75}{2} = 0,625$

$\left.\begin{array}{l} f(0,625) > 0 \\ f(0,5) < 0 \end{array}\right\}$

$0,5 < \alpha < 0,625.$

TP1page126

La méthode de Newton-Raphson

a. Déterminer la fonction dérivée de f et vérifier qu'elle ne s'annule pas sur l'intervalle [0 ; 1].

b. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 en fonction de $f'(x_0)$, $f(x_0)$ et x_0.

c. Démontrer que l'abscisse x_1 du point d'intersection de $\mathcal{T}_0$ avec l'axe des abscisses vérifie :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

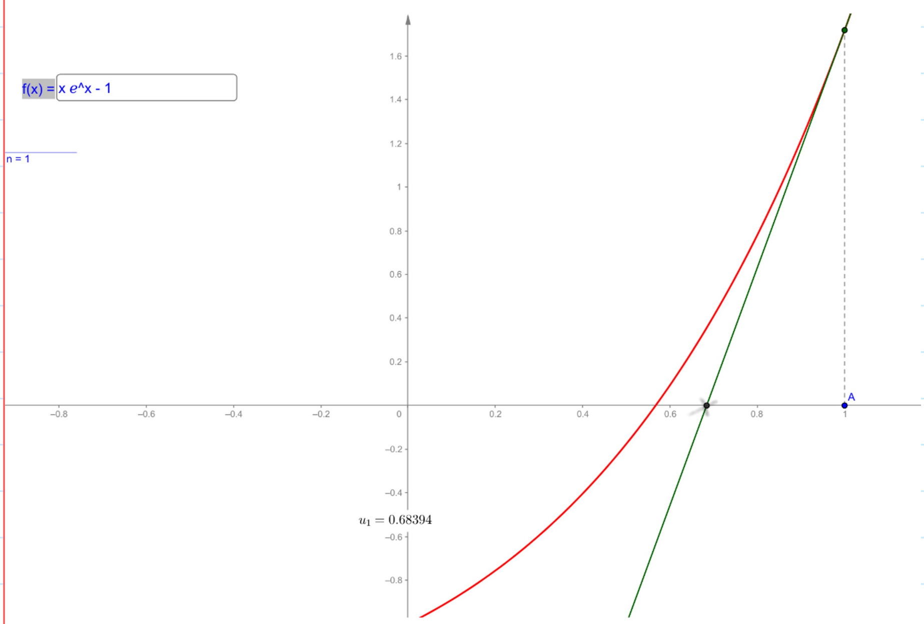
d. On réitère ce procédé en remplaçant x_0 par x_1 pour obtenir une abscisse x_2, puis en remplaçant x_1 par x_2 pour pour obtenir une abscisse x_3, et ainsi de suite.
On choisit $x_0 = 1$.
Recopier les fonctions ci-dessous dans l'éditeur, puis compléter la deuxième fonction.

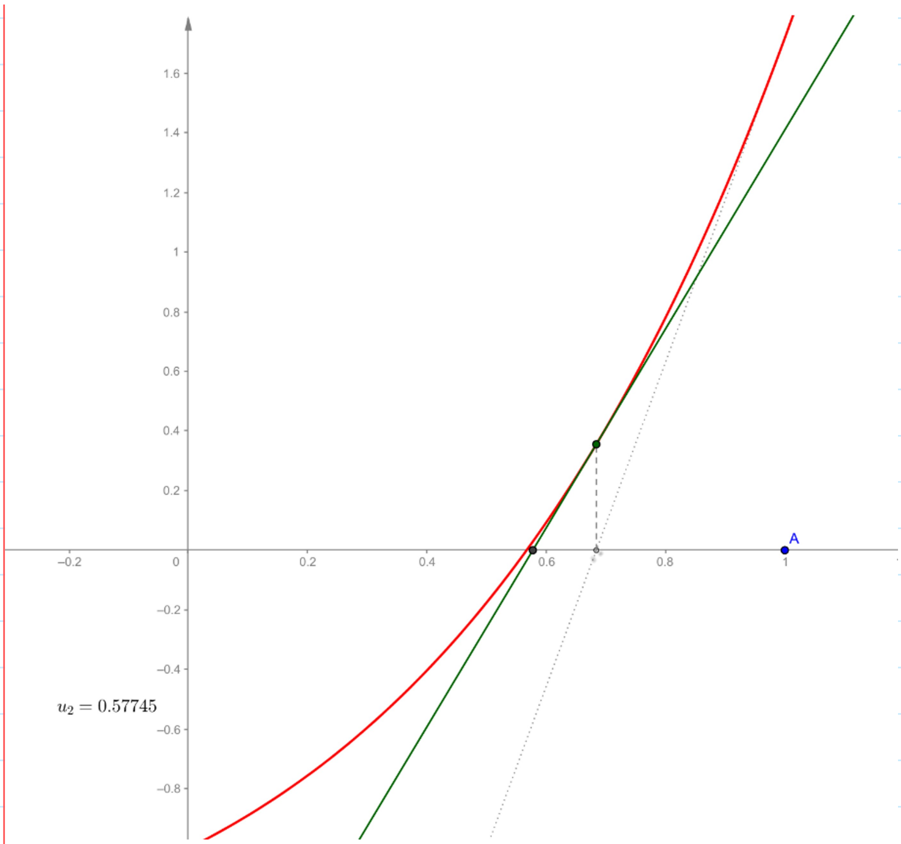
```
def nombre_dérivé_approché(a):
    h=1e-10
    return(f(a+h)-f(a))/h

def méthode_Newton(n):
    x=1
    for i in range(n):
        x=x-...
    return ...
```

On souhaite calculer le nombre d'étapes nécessaires à la méthode de Newton-Raphson pour obtenir une valeur approchée de la solution dans l'intervalle $[a ; b]$, avec une précision au moins égale à celle qui a été obtenue par la méthode de la question 1 en 50 étapes.
Pour cela, recopier et compléter la fonction comparaison ci-dessous, puis conclure.

```
def comparaison(n):
    a=méthode_1(0,1,n)[0]
    b=...
    i=0
    while ... or ... :
        i=i+1
    return ...
```





1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
A
−0.2
−0.4
$u_2 = 0.57745$
−0.6
−0.8