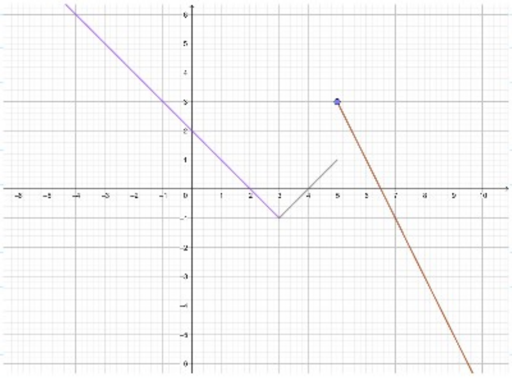
Exercice du cours :

1.3. Exemple

Etudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -x+2 & \text{pour } x < 3 \\ f(x) = x-4 & \text{pour } 3 \leqslant x < 5 \\ f(x) = -2x+13 & \text{pour } x \geqslant 5 \end{cases}$$



f est affine par intervalles
donc f est continue sur $]-\infty ; 3[$
sur $]3 ; 5[$
et sur $]5 ; +\infty[$
(comme f est une fonction usuelle)

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} (-x+2) = -3+2 = -1 = f(3)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} (x-4) = 3-4 = -1 = f(3)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3}} f(x) = f(3)$

f est continue en 3

$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} x-4 = 5-4 = 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} (-2x+13) = -2 \times 5 + 13 = 3$

$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} f(x)$

f n'est pas continue en 5

Exercice 58 page 135

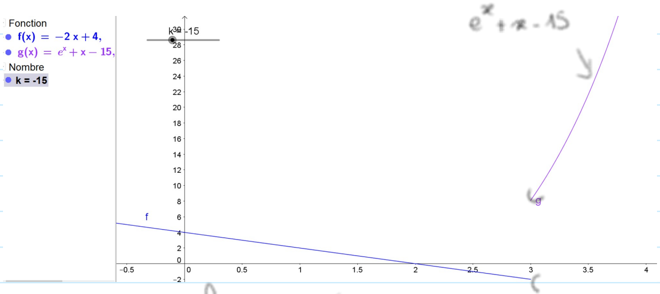
mercredi 16 décembre 2020 10:53

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

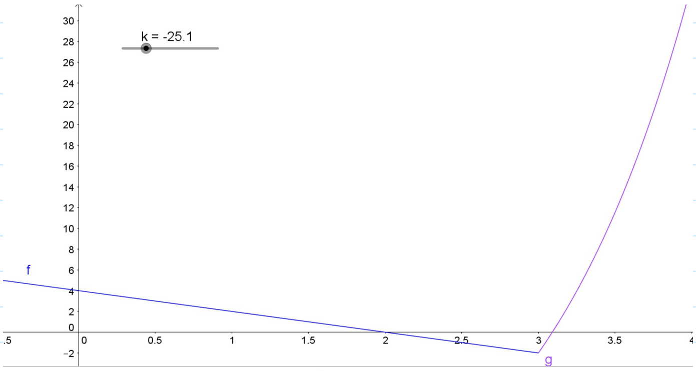
$$f(x)=\begin{cases}-2x+4 & \text{si } x<3\\ e^x+x+k & \text{si } x\geqslant 3\end{cases}, \text{ où } k \text{ est un réel.}$$

1. Après avoir créé un curseur pour le réel k, représenter graphiquement la fonction f à l'aide d'un logiciel de géométrie.

2. Conjecturer une valeur approchée à 10^{-1} de k pour laquelle f est continue, puis calculer sa valeur exacte.



f non continue en 3



f semble continue en 3.

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ <}} (-2x+4) = -2\times 3+4 = -2$$

f° usuelles

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ >}} e^x+x+k = e^3+3+k = f(3)$$

f continue ssi $-2 = e^3+3+k$

$\iff -2-e^3-3 = k$

$\iff -5-e^3 = k$ ← valeur exacte

$k \approx -25,1$ ← valeur approchée

mardi 15 décembre 2020 17:33

Exercice du cours 2 :

Exemple On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.
f est strictement croissante sur $[0;1]$, pour tout x de $[0;1]$, $f(x)\in[0;1]$, la courbe $(\mathcal{C})$ est au-dessus de la droite (D) la droite d'équation $y=x$ sur $]0;1[$.

f est dérivable sur $[0;1]$ car quotient de fct° dérivables sur $[0;1]$ et $e^x-x\neq 0$ sur $[0;1]$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)\times(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\frac{(e^x)^2-xe^x-\left((e^x)^2-e^x-e^x+1\right)}{(e^x-x)^2}$$

$$(e^x)^2=e^{2x}$$

$$f'(x)=\frac{-xe^x+2e^x-1}{(e^x-x)^2}$$ ← strict (+) sur $[0;1]$ car carré non nul.

numérateur $N(x)=-xe^x+2e^x-1$ $\quad (uv)'=u'v+uv' \quad (ku)'=0+k\times u'=k\times u'$

N est dérivable sur $[0;1]$, $N'(x)=-1\times e^x+(-x)\times e^x+2e^x$
$=-e^x-xe^x+2e^x$
$=1\times e^x-xe^x=e^x(1-x)$

la fonction est strict. positive sur IR donc sur $[0;1]$ et $(1-x)$ est positif.

Par la règle des signes, $N'(x)$ est positif donc N est strict ↗ sur $[0;1]$

$0\le x\le 1$
$-1\le -x\le 0$ $\times(-1)$
$0\le 1-x\le 1$ $+1$

N est strictement croissante sur $[0;1]$: $N(0)=-0e^0+2e^0-1=1$.

$0\le x\le 1$ donc $N(0)\le N(x)$ donc N est strict! positif sur $[0;1]$

donc $f'(x)>0$ sur $[0;1]$ donc f est croissante sur $[0;1]$

Sur $[0;1]$: $0\le x\le 1$
$f(0)\le f(x)\le f(1)$ car f est croissante sur $[0;1]$

$f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$ donc $f(0)=0$ $\quad f(1)=\dfrac{e^1-1}{e^1-1}=1$. donc $f(x)\in[0;1]$

Posit° relative de C_f et $D: y=x$.

$$f(x)-x=\frac{e^x-1}{e^x-x}-x\times\frac{e^x-x}{e^x-x}=\frac{e^x-1-xe^x+x^2}{e^x-x}=\frac{e^x(1-x)+(x^2-1)}{e^x-x}=\frac{e^x(1-x)+(x-1)(x+1)}{e^x-x}$$

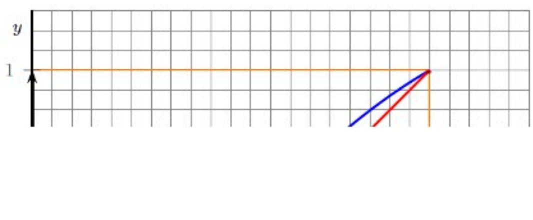
$$=\frac{(1-x)\left(\boxed{e^x-(x+1)}\right)}{e^x-x}$$

Signe de $e^x-(x+1)$: la droite d'éq° : $y=x+1$ est la tg^te en 0 à la courbe de la fonction exponentielle
donc la courbe de la fct° exp est au-dessus de ses tangentes (ou sur) car la fct° exp est convexe.
donc $e^x-(x+1)\ge 0$ sur IR.
$1-x\ge 0$ sur $[0;1]$
$e^x\ge x+1>x$ donc $e^x-x>0$
$f(x)-x\ge 0$
donc C_f est au dessus de $D: y=x$

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$ et on obtient :



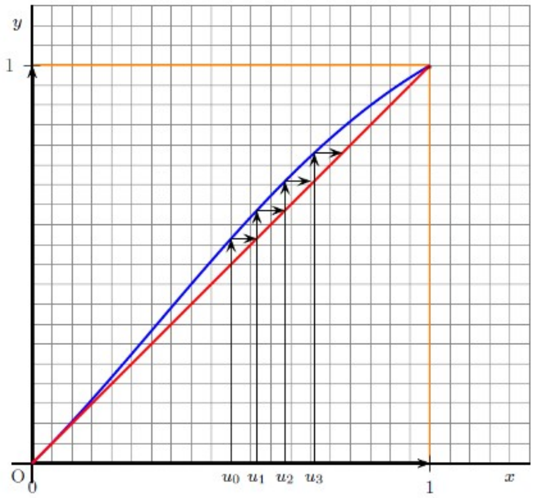
On mq $\frac{1}{2}\le u_n\le u_{n+1}\le 1$ par récurrence.

initialisat° : $u_0=0,5$ $\quad u_1=f(u_0)=\dfrac{e^{0,5}-1}{e^{0,5}-0,5}\approx 0,56$

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ et on obtient :



$e^x \geq x+1 > x$ donc $e^x - x > 0$

donc C_f est au dessus de $D : y = x$

On mq $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ par récurrence.

initialisat° : $u_0 = 0,5$ $\quad u_1 = f(u_0) = \frac{e^{0,5} - 1}{e^{0,5} - 0,5} \approx 0,56$

donc on a bien : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ pour $n = 0$

Hérédité : 1) hyp. de récurrence : on suppose que pour un naturel $k \geq 0$: $\frac{1}{2} \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 1$

2) dém° : donc $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(1)$

car f est croissante sur $[0;1]$

$\frac{1}{2} \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 1$

l'hérédité est démontrée

Conclusion : grâce au principe de dém° par récurrence pour tout naturel n, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

donc (u_n) est croissante, majorée par 1 donc convergente.

$u_{n+1} = f(u_n)$, f est continue sur $[0;1]$ (constitué de fonctions usuelles)

donc (u_n) cvge vers l avec $l = f(l)$