# Exercice 52 page 98

mercredi 2 décembre 2020 14:40

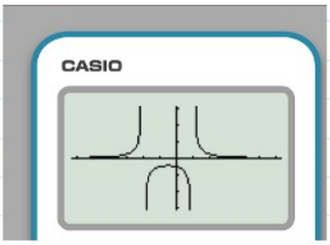
Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$.

**1.** Déterminer l'ensemble de définition de $f$.

**2.** Étudier le sens de variation de la fonction $f$.

**3.** Déterminer les limites de la fonction $f$ aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction $f$.

**4.** Dresser le tableau de variation de la fonction $f$ et vérifier graphiquement les résultats.




1. Recherche des valeurs interdites : $x^2+x-2=0$ ; 1 est racine évidente, comme

$P = \frac{c}{a} = -\frac{2}{1}$ donc $-2$ et $1$ sont les racines

Ens. de déf° : $\mathbb{R} - \{-2 ; 1\}$

2. $f$ est dérivable sur son ens. de définition car c'est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$ donc $f'(x) = \dfrac{-(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$ ← carré : strict. + sur $\mathbb{R} - \{-2;1\}$.

$f'$ a m̂ signe que $-2x-1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1/2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe $-2x-1$ | | + | | + | 0 | − | | − | |
| $f$ | $0$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-4/9$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ |

Affine avec $m = -2$

$-2x-1=0$
$\iff -2x = 1$
$\iff x = -1/2$

$f$ est strict croissante sur $]-\infty ; -2[$ et sur $]-2 ; -1/2]$

$f$ est strict. décroissante sur $]-\frac{1}{2} ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2+x-2 = +\infty$ donc par l'inverse $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

la droite d'éq° $y=0$ est donc asymptote à la courbe de $f$ en $\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2+x-2 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2$ car $x^2+x-2 = x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2} = 1$

$= +\infty$. (par somme)

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ par l'inverse. donc la droite d'éq° $y=0$ (ie l'axe des abscisses) est asymptote à $C_f$ en $-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} x^2+x-2 = 0$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} x^2+x-2 = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = -\infty$

donc la droite d'éq° $x=-2$ est asymptote à $C_f$

$x$ | $-\infty$ $-2$ $1$ $+\infty$

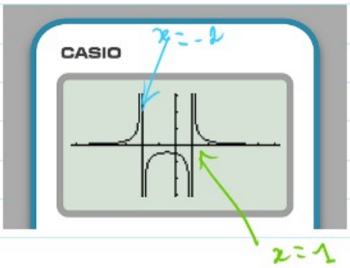
donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = +\infty$ | $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = -\infty$ $x = -2$ est asymptote à $C_f$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\underline{\underline{1}}x^2+x-2$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

signe de $a = 1$ à l'ext. des racines

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} x^2+x-2 = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'éq° $x = 1$ est asymptote à $C_f$.

4) cf tableau $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})-2} = \frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2} = -\frac{4}{9}$



Exercice66 page 99

mercredi 2 décembre 2020 14:44

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction $f$ en $a$.

**1.** $f(x)=\sqrt{\frac{7}{x}-3x+x^2}$ ; $a=+\infty$

**2.** $f(x)=\sqrt{4+5e^x}$ ; $a=-\infty$

**3.** $f(x)=e^{-x^2}+3x+1$ ; $a=-\infty$

**4.** $f(x)=e^{-\frac{7}{x}}$ ; $a=-\infty$

1) $f$ est une composée.

$x \longmapsto \frac{7}{x}-3x+x^2 \overset{\sqrt{\ }}{\longmapsto} f(x)$

$X \longmapsto \sqrt{X}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7}{x}-3x+x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x^2\left(1-\frac{7}{x^3}-\frac{3}{x}\right)\right]$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7}{x}-3x+x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = \boxed{+\infty}$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

2) $f$ est une composée : $x \longmapsto 4+5e^x \overset{\sqrt{\ }}{\longmapsto} \sqrt{4+5e^x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 4+5e^x = 4+5\times0 = 4$ (par somme)

$\lim\limits_{X\to4} \sqrt{X} = 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

donc la droite d'éq° $y=2$ est asymptote de la courbe de $f$ en $-\infty$.

3) $f$ est la somme d'une f° affine et d'une composée.

$x \longmapsto -x^2 \overset{\exp}{\longmapsto} e^{-x^2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2 = -\infty$

$\lim\limits_{X\to-\infty} \exp X = 0$

Par composée $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 3x+1 = -\infty$

Par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

4) $f(x) = \exp\left(-\frac{7}{x}\right)$ $f$ est une composée

$x \longmapsto -\frac{7}{x} \overset{\exp}{\longmapsto} \exp\left(-\frac{7}{x}\right)$

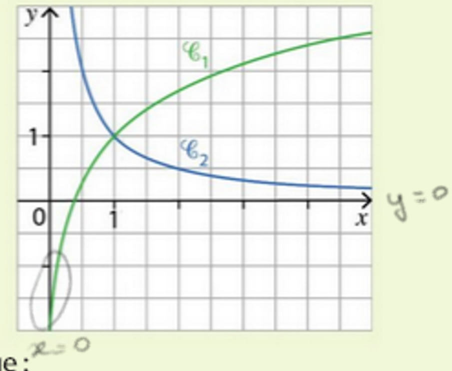
$\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{7}{x} = \boxed{0}$

$\lim\limits_{X\to0} \exp X = 1$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp\left(-\frac{7}{x}\right) = 1$ donc la droite d'éq° $y=1$ est asymptote à $C_f$ en $-\infty$.

Exercice 95 page 104

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives de deux fonctions $f_1$ et $f_2$ définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.




On sait que :

- l'axe des ordonnées est asymptote aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ; (*)
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$ ; (**)
- la fonction $f_2$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ ;
- la fonction $f_1$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ ;
- la limite, quand $x$ tend vers $+\infty$, de $f_1(x)$ est $+\infty$.

Pour chacune des questions suivantes, donner la seule réponse exacte sans justifier.

**1.** La limite, quand $x$ tend vers 0, de $f_2(x)$ est :

(a) 0 (b) $+\infty$ (c) on ne peut pas conclure.

**2.** La limite, quand $x$ tend vers $+\infty$, de $f_2(x)$ est :

(a) 0 (b) 0,2 (c) on ne peut pas conclure.

**3.** Le tableau de signes de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

(a)

| $x$ | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f_2(x)-f_1(x)$ | ‖ | + | |

(b)

| $x$ | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f_2(x)-f_1(x)$ | ‖ | − | |

(c)

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_2(x)-f_1(x)$ | ‖ | + | 0 | − | |

(*) $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} f_2(x) = +\infty$

(**) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = 0.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$

Q1) réponse b.

Q2) réponse a.

Q3) réponse c.