Calcul d'intégrales

Exercice 62 page 263

Calculer les intégrales suivantes.

1. $I = \int_1^2 \frac{3}{x^4}\,dx$

2. $J = \int_0^3 \frac{1}{2x+1}\,dx$

3. $K = \int_0^1 (1+u)^3\,du$

4. $L = \int_0^1 y e^{y^2+1}\,dy$

Toutes les fct à intégrer sont continues sur l'intervalle considéré.

1) $I = \int_1^2 \frac{3}{x^4}\,dx = \left[-\frac{1}{x^3}\right]_1^2 = -\frac{1}{2^3} - \left(-\frac{1}{1^3}\right) = -\frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8}$.

2) $J = \int_0^3 \frac{1}{2x+1}\,dx = \int_0^3 \frac{1}{2} \times \frac{2}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{2}{2x+1}\,dx$

en posant $u(x) = 2x+1$, $u'(x) = 2$

forme $\frac{u'}{u}$ ⚠ Sur $[0;3]$, $1 \leq 2x+1 \leq 7$

donc $u(x) > 0$.

$J = \left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_0^3 = \frac{1}{2}\ln(7) - \frac{1}{2}\ln(1) = \frac{1}{2}\ln 7$.

3) $K = \int_0^1 (1+u)^3\,du = \int_0^1 (1+x)^3\,dx = \left[\frac{1}{4}(1+x)^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}(1+1)^4 - \frac{1}{4}(1+0)^4 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

$u(x) = 1+x$ donc $u'(x) = 1$.

Forme : $u' \times u^3$

4) $L = \int_0^1 y e^{y^2+1}\,dy = \int_0^1 x e^{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2} 2x \times e^{x^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{2} \times e^{x^2+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^{1^2+1} - \frac{1}{2}e^{0^2+1}$

Forme : $u' e^u$ avec $u(x) = x^2+1$ et $u'(x) = 2x$

$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e$

Propriétés de l'intégrale

mardi 6 avril 2021 17:51

Exercice 23 page 259

Soit f une fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-6		1		3		5
$f(x)$	4	↗	7	↘	-3	↗	-1

1. Donner le signe de $\int_{-6}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Donner le signe de $\int_{3}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Donner un encadrement de $\int_{-6}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

4. Donner un encadrement de $\int_{3}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t$.

5. Peut-on connaître le signe de $\int_{1}^{3} f(t)\,\mathrm{d}t$?

1) Sur $[-6;1]$, $4 \leq f(t) \leq 7$ donc f est positive

$-6 < 1$ donc $\int_{-6}^{1} f(t)\,dt$ positive.

2) Sur $[3;5]$, $-3 \leq f(t) \leq -1$ donc f est négative

$3 < 5$ donc $\int_{3}^{5} f(t)\,dt$ négative.

3) Sur $[-6;1]$, $4 \leq f(t) \leq 7$.

Conservation de l'ordre :

$$\int_{-6}^{1} 4\,dt \leq \int_{-6}^{1} f(t)\,dt \leq \int_{-6}^{1} 7\,dt.$$

$$[4\times x]_{-6}^{1} \leq \int_{-6}^{1} f(t)\,dt \leq [7x]_{-6}^{1}$$

$$4\times 1 - 4\times(-6) \leq \int_{-6}^{1} f(t)\,dt \leq 7\times 1 - 7\times(-6)$$

$$28 \leq \int_{-6}^{1} f(t)\,dt \leq 49.$$

OU propriété : Si pour tout réel t de $[a;b]$ $m \leq f(t) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$

4) Pour tout réel t de $[3;5]$ $-3 \leq f(t) \leq -1$ donc $-3\times(5-3) \leq \int_3^5 f(t)\,dt \leq -1\times(5-3)$

donc $-6 \leq \int_3^5 f(t)\,dt \leq -2$.

5) Comme f change de signe sur l'intervalle $[1;3]$, on ne peut rien dire sur le signe de $\int_1^3 f(t)\,dt$.

Signe d'une primitive

mardi 6 avril 2021 17:53

Exercice 61 page 263

On considère la fonction F, définie sur $[1;2]$ par :

$$F(x) = \int_1^x (2-t)\ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Que représente F pour la fonction $t \mapsto (2-t)\ln(t)$?
2. Déterminer le sens de variation de F sur $[1;2]$.
3. Déterminer, selon les valeurs de x, le signe de $F(x)$ pour x appartenant à $[1;2]$.

1) F est la primitive qui s'annule pour $x=1$

$F(1) = \int_1^1 (2-t)\ln t \, dt = 0.$

2) f déf sur $[1;2]$ par $f(t) = (2-t)\ln t$

f est une fonction continue donc F est dérivable et $F'(x) = f(x)$.

x	1		2
$2-x$		$+$	0
$\ln x$		$+$	
$F'(x) = f(x)$		$+$	
F	0	$\nearrow$	

$x \mapsto 2-x$ fonction affine de coef dir -1 donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

F est croissante sur $[1;2]$

3) Pour x de $[1;2]$, $1 \leq x \leq 2$

$F(1) \leq F(x)$

or $0 \leq F(x)$, F est donc positive sur l'intervalle $[1;2]$

Activité 3 page 243

Situation 3 Une méthode de calcul d'intégrales : l'intégration par parties

Objectif
Découvrir la méthode d'intégration par parties.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I dont les dérivées u' et v' sont continues sur I. On admet que, alors, les fonctions $u'v$ et uv' sont continues sur I.

1. **a.** Montrer que $u'v = (uv)' - uv'$.
   b. En déduire que, pour tous réels a et b de I, $\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$.
   Cette égalité est appelée « formule d'intégration par parties ».
2. En posant $u'(t) = \sin(t)$ et $v(t) = t$, puis en appliquant la formule d'intégration par parties, calculer :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,dt.$$
3. Soit x un nombre réel strictement positif.
   En posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(t)$, calculer $F(x) = \int_1^x \ln(t)\,dt$. Que représente alors la fonction F ?

1) a) On sait que u, v sont dérivables donc $u \times v$ est dérivable

L'existence des primitives est assurée par la continuité des fonctions

$(uv)' = u'v + uv'$, soit $u'v = (uv)' - uv'$.

b) d'où $\int_a^b u'v(t)\,dt = \int_a^b (uv)'(t) - uv'(t)\,dt = \int_a^b (uv)'(t)\,dt - \int_a^b (uv')(t)\,dt$

par linéarité de l'intégrale.

$$\int_a^b u'v(t)\,dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt.$$

2) $\int_0^{\pi/2} t\sin t\,dt = \left[-t\cos t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos t\,dt$

$\begin{cases} u'(t) = \sin t \\ v(t) = t \end{cases}$ $\quad u(t) = -\cos t$, $v'(t) = 1$.

les fonctions u, v sont dérivables et u' et v' sont continues sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\int_0^{\pi/2} t\sin t\,dt = -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - (0\cos 0) + \left[\sin t\right]_0^{\pi/2} = 0 + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

3) $\int_1^x \ln t\,dt = \int_1^x 1 \times \ln t\,dt = \left[t\ln t\right]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t}\,dt = x\ln x - \ln 1 - \int_1^x 1\,dt$

$\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \ln t \end{cases}$ $\quad u(t) = t$, $v'(t) = \frac{1}{t}$ $\quad$ u et v sont dérivables, de dérivées continues sur $\mathbb{R}^{*+}$

$$\int_1^x \ln t\,dt = x\ln x - \left[t\right]_1^x = x\ln x - x + 1$$

donc $F(x) = x\ln x - x + 1$ est la primitive de la fonction ln qui s'annule en 1

3.6. Intégration par parties

Propriété 8.

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a;b]$. Alors, on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Quelle hypothèse manque-t-il à ce théorème ?

u' et v' continues sur $[a;b]$

VRAI FAUX Dire si la proposition est vraie ou fausse.

a. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x = [x\cos(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$

b. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x = [-x\cos(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$

c. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x = [-x\cos(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x$

d. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x = [x\sin(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x$

On pose :

$\begin{cases} u'(x) = \sin x & u(x) = -\cos x \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{cases}$

u et v dérivables sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$
et u', v' continues sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

$\int_{\pi/2}^{\pi} x\sin x\,dx = \left[-x\cos x\right]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos x\,dx$

$= \left[-x\cos x\right]_{\pi/2}^{\pi} + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx$

la réponse c est vraie

Ensuite, $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_{\pi/2}^{\pi} = \sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} = -1$

$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_{\pi/2}^{\pi} = -\cos\pi + \cos\pi/2 = 1.$

et donc $-\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x\,dx = +\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx$

Par conséquent, la réponse b est vraie.

Les réponses a et d sont fausses, grâce aux calculs précédents.

Pour calculer $\int_0^1 x e^x \, dx$ par une intégration par parties, il vaut mieux poser :

a. $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$

b. $u(x) = e^x$ et $v'(x) = x$

Réponse : a

Si $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$.

u, v fonctions dérivables et u', v' continues sur $[0 ; 1]$

Il est facile de trouver une primitive de la fct exponentielle.

Méthode : Calculer une intégrale en intégrant par parties

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx \qquad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx \qquad C = \int_1^{e^2} \ln x \, dx$$

$A = 1$ cf activité préparatoire

$$B = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx = \left[x^2 \sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x \sin x \, dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\frac{\pi}{2} - 0 - 2\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx = \frac{\pi^2}{4} - 2A = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

On pose $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \cos x \end{cases}$ $\quad u'(x) = 2x$, $v(x) = \sin x$ $\quad$ u et v sont dérivables, de dérivées continues sur $\mathbb{R}$

$$C = \int_1^{e^2} \ln x \, dx = \int_1^{e^2} 1 \times \ln x \, dx = \left[x \ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \times \frac{1}{x} \, dx = e^2 \ln e^2 - 1 \ln 1 - \int_1^{e^2} 1 \, dx$$

$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln x \end{cases}$ $\quad u(x) = x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad$ u et v sont dérivables et u', v' sont continues

$$C = e^2 \times 2 \ln e - 0 - \left[x\right]_1^{e^2} = 2e^2 - (e^2 - 1) = e^2 + 1$$