Exercice 52 page 98

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f.

3. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f.

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f et vérifier graphiquement les résultats.

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x-2}$ existe ssi $x^2+x-2 \neq 0$

$x^2+x-2 = 0 \iff x = 1$ ou $x = -2$

Ens. de déf : $\mathbb{R} - \{1 ; -2\}$

2) f est dérivable sur son ens. de déf° car c'est un quotient de fct° dérivables

$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{-(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$ ← ⊕ car carré (strict sur D_f)

a m̂ signe que $-2x-1$

x	$-\infty$		-2		$-0{,}5$		1		$+\infty$
signe $-2x-1$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
f	0 ↗		$+\infty$ || $-\infty$ ↗		$-4/9$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0

fct° affine
coef. dir. -2 ⊖

$-2x-1 = 0$

$\iff -1 = 2x$

$\iff -0{,}5 = x$

f est strict croissante sur $]-\infty ; -2[$ et sur $]-2 ; -0{,}5]$

f est strict décroissante sur $[-0{,}5 ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2+x-2}$

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{x^2\left(1 + \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1}{x^2\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} = 1 + 0 - 0 = 1$ par somme

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$. par inverse $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$: la droite d'éq° $y = 0$ (axe des abscisses) est asymptote à C_f en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (par inverse) donc l'axe des abs. est asymptote à C_f en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x - 2 = +\infty$ par somme.

Limite en -2 : $x < -2$: $\lim x^2 + x - 2 = (-2)^2 + (-2) - 2 = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + (x) - 2 = +\infty$ par somme.

<u>limite en -2</u> : $x < -2$. : $\lim\limits_{x \to -2} 1x^2 + x - 2 = (-2)^2 + (-2) - 2 = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

signe de $a = 1$ à l'ext des racines.

quand $x > -2$

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = -\infty$

La droite d'éq° $x = -2$ est asymptote à la courbe C_f .

<u>limite en 1</u> $x < 1$ $\lim\limits_{x \to 1} x^2 + x - 1 = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$

$f(-0,5) = \dfrac{1}{(-0,5)^2 + (-0,5) - 2} = \dfrac{1}{-2,25} = -\dfrac{4}{9}$

La droite d'éq° $x = 1$ est asymptote à la courbe C_f.

Exercice 66 page 99

mercredi 2 décembre 2020 14:44

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en a.

1. $f(x) = \sqrt{\frac{7}{x} - 3x + x^2}$; $a = +\infty$

2. $f(x) = \sqrt{4 + 5e^x}$; $a = -\infty$

3. $f(x) = e^{-x^2} + 3x + 1$; $a = -\infty$

4. $f(x) = e^{-\frac{7}{x}}$; $a = -\infty$

1) $x \longmapsto \frac{7}{x} - 3x + x^2 \xmapsto{\sqrt{\ }} \sqrt{\frac{7}{x} - 3x + x^2}$

$X = \frac{7}{x} - 3x + x^2$

$x^2 - 3x + \frac{7}{x} = x^2\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^3}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^3} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - 3x + \frac{7}{x}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$.

Par composée $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2) $x \longmapsto 4 + 5e^x \xmapsto{\sqrt{\ }} \sqrt{4 + 5e^x}$

$X = 4 + 5e^x$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 4 + 5e^x = 4 + 5 \times 0 = 4$

$\lim\limits_{X \to 4} \sqrt{X} = 2$

Par composée $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

3) $f(x) = e^{-x^2} + 3x + 1$ en $a = -\infty$.

$x \longmapsto -x^2 \xmapsto{\exp} e^{-x^2}$

$X = -x^2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty$

$\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

Par composée $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x + 1 = -\infty$

par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

4) $f(x) = e^{-7/x}$ en $a = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{7}{x} = 0$

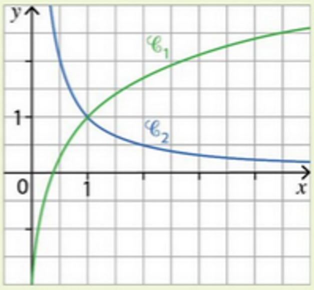
$\lim\limits_{X \to 0} e^X = 1$

Par composée $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-7/x} = 1$

Exercice 95 page 104

mercredi 2 décembre 2020 14:45

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.



On sait que : $\to x : 0$

- l'axe des ordonnées est asymptote aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$; (*)
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$; $y = 0$ (**)
- la fonction f_2 est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$;
- la fonction f_1 est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$;
- la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $f_1(x)$ est $+\infty$. (***)

Pour chacune des questions suivantes, donner la seule réponse exacte sans justifier.

1. La limite, quand x tend vers 0, de $f_2(x)$ est :

a) 0 b) $+\infty$ c) on ne peut pas conclure.

2. La limite, quand x tend vers $+\infty$, de $f_2(x)$ est :

a) 0 b) 0,2 c) on ne peut pas conclure.

3. Le tableau de signes de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

a)

x	0		$+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	‖	+	

b)

x	0		$+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	‖	−	

c)

x	0		1		$+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	‖	+	0	−	

(*) $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} f_2(x) = +\infty$

(**) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = 0$

(***) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$

1) $\lim\limits_{x \to 0} f_2(x) = +\infty$. (*) l'axe des ordonnées est asymptote à C_2

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = 0$ (**)

l'axe des abscisses est asymptote à C_2

$f_2(x) - f_1(x) > 0$

$\iff f_2(x) > f_1(x)$

$\iff C_2$ est au dessus de C_1

Le tableau de signe de $f_2(x) - f_1(x)$ est c).