Exercice 31 page 96

mercredi 2 décembre 2020 11:44

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 5 - 3x \text{ et } g(x) = e^x.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer la limite de g en $-\infty$.

3. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{5-3x}$.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (5-3x) = -\infty$ d'après les règles générales sur les limites.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

3. $h(x) = e^{5-3x} = \exp(5-3x)$

$$\underset{+\infty}{x} \xmapsto{f} \underset{-\infty}{5-3x} \xmapsto{g} \exp(5-3x)$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (5-3x) = \boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{X \to \boxed{-\infty}} e^X = 0$

donc d'après les limites de fonctions composées $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{5-3x} = 0$

donc la droite d'équation $\boxed{y=0}$ est asymptote en $+\infty$. (asymptote horizontale) Ici c'est l'axe des abscisses.

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} 5-3\times e^x$

$5-3X$

$$\underset{+\infty}{x} \xmapsto{e^x} \underset{+\infty}{e^x} \xmapsto{5-3X} \underset{-\infty}{5-3\times e^x}$$

Exercice 51 page 98

mercredi 2 décembre 2020 11:47

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{5-2x}{-x-3}$ sur $]-\infty\,;-3[\,\cup\,]-3\,;+\infty[$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.

2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f et vérifier graphiquement les résultats.

1) Pour étudier les variat° de f, on étudie le signe de $f'(x)$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

f est un quotient de fonctions dérivables chacune sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur son ens. de définition.

$$f'(x) = \frac{-2\times(-x-3) - (5-2x)\times(-1)}{(-x-3)^2} = \frac{11}{(-x-3)^2} \leftarrow \text{carré strict } + \ (x \neq -3)$$

Sur $]-\infty\,;-3[\,\cup\,]-3\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strict croissante sur $]-\infty\,;-3[$ et sur $]-3\,;+\infty[$

2) $f(x) = \frac{5-2x}{-x-3}$ en $+\infty$: on est en présence du type : " $\frac{-\infty}{-\infty}$ "

$$f(x) = \frac{-2x\left(\frac{5}{-2x}+1\right)}{-x\left(1+\frac{3}{x}\right)} = 2\times\frac{1-\frac{5}{2x}}{1+\frac{3}{x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{2x}\right) = 1 - 0 = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{3}{x} = 1$

Par quotient et produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2\times\frac{1}{1} = 2$

la droite d'éq° $y=2$ est asymptote à C_f en $+\infty$

en $-\infty$, F.I du type " $\frac{+\infty}{+\infty}$ ", de même $f(x) = 2\times\frac{1-5/2x}{1+3/x}$

avec $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-5/x}{1+3/x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ la droite d'éq° $y=2$ est asymptote à C_f en $-\infty$.

en -3 : $x<-3$: $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\<}} f(x)$

$\lim\limits_{\substack{x\to-3\\<}} 5-2x = 5-2\times(-3) = 11^+$

$\lim\limits_{\substack{x\to-3\\<}} -x-3 = 0^+$ par val $+$

Par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\<}} f(x) = +\infty$

Asymptote d'éq° $x=-3$

en -3 ? $x>-3$ $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\>}} f(x)$

$\lim\limits_{\substack{x\to-3\\>}} 5-2x = 11^+$

$\lim\limits_{\substack{x\to-3\\>}} -x-3 = 0^-$ par val $-$

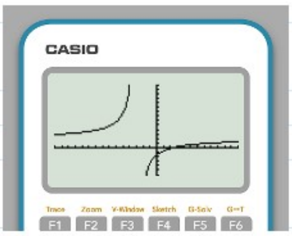
Par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\>}} f(x) = -\infty$

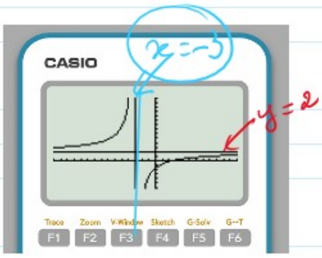
Règle des signes

Asymptote d'éq° $x=-3$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$-x-3$		$+$	0	$-$	

coef dir (-1)





x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f	0 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0