Probabilités conditionnelles et suites numériques

Exercice 1 : Partie A :

1. $p(G_1) = 0,5$ ; $p_{G_1}(G_2) = 0,6$ ; $p_{P_1}(G_2) = 1 - 0,7 = 0,3$.

2.

$G_1$ (0,5) $\xrightarrow{0,6}$ $G_2$ : $p(G_1 \cap G_2) = 0,6 \times 0,5 = 0,3$.

$G_1$ (0,5) $\xrightarrow{0,4}$ $P_2$

$P_1$ (0,5) $\xrightarrow{0,3}$ $G_2$ $p(P_1 \cap G_2) = 0,5 \times 0,3 = 0,15$.

$P_1$ (0,5) $\xrightarrow{0,7}$ $P_2$

$G_1$, $P_1$ forment une partition, on peut donc utiliser la formule des probabilités totales.

$$p(G_2) = p(G_1 \cap G_2) + p(P_1 \cap G_2) = 0,3 + 0,15 = 0,45$$

$$p(P_2) = 1 - p(G_2) = 1 - 0,45 = 0,55.$$

Partie B

1. $p_{G_n}(G_{n+1}) = 0,6$ et $p_{P_n}(G_{n+1}) = 0,3$.

2.

$G_n$ ($x_n$) $\xrightarrow{0,6}$ $G_{n+1}$ : $p(G_n \cap G_{n+1}) = x_n \times 0,6$

$G_n$ ($x_n$) $\xrightarrow{0,4}$ $P_{n+1}$

$P_n$ ($y_n$) $\xrightarrow{0,3}$ $G_{n+1}$ $p(P_n \cap G_{n+1}) = y_n \times 0,3$

$P_n$ ($y_n$) $\xrightarrow{0,7}$ $P_{n+1}$

$P_n$ et $G_n$ forment une partition, on peut donc utiliser la formule des probabilités totales.

$$x_{n+1} = p(G_{n+1}) = x_n \times 0,6 + y_n \times 0,3$$

de m, $y_{n+1} = p(P_{n+1}) = x_n \times 0,4 + y_n \times 0,7$

3. $v_n = x_n + y_n$ donc $v_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n + 0,4x_n + 0,7y_n$

$$v_{n+1} = (0,6 + 0,4)x_n + (0,3 + 0,7)y_n = x_n + y_n = v_n.$$

Pour tout naturel $n$, $v_{n+1} = v_n$ ; $(v_n)$ est donc constante et $v_n = v_0 = x_0 + y_0 = 0,5 + 0,5 = 1$

b] $w_n = 4x_n - 3y_n$. Pour tout naturel $n$,

$w_{n+1} = 4x_{n+1} - 3y_{n+1} = 4\times(0{,}6x_n + 0{,}3y_n) - 3(0{,}4x_n + 0{,}7y_n)$

$= 2{,}4x_n + 1{,}2y_n - 1{,}2x_n - 2{,}1y_n = 1{,}2x_n - 0{,}9y_n$

$= 0{,}3\times(4x_n - 3y_n) = 0{,}3\,w_n$

la suite $(w_n)$ est une suite géométrique de 1er terme $w_0 = 0{,}5$ et de raison $0{,}3$ donc $w_n = 0{,}5\times(0{,}3)^n$.

4a] $w_n = 4x_n - 3y_n = 4x_n - 3(v_n - x_n)$ car $x_n + y_n = v_n$

$w_n = 7x_n - 3v_n$

d'où $w_n + 3v_n = 7x_n$ et $x_n = \dfrac{w_n + 3v_n}{7}$

$y_n = v_n - x_n = v_n - \dfrac{w_n + 3v_n}{7} = \dfrac{4v_n - w_n}{7}$

or $v_n = 1$ et $w_n = 0{,}5\times 0{,}3^n$.

donc $x_n = \frac{1}{7}\times(0{,}5\times 0{,}3^n + 3)$ et $y_n = \frac{1}{7}\times(4 - 0{,}5\times 0{,}3^n)$

Exercice 2 : Pour tout $n \geq 1$ $\begin{cases} u_1 = 1/2 \\ u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}\times u_n. \end{cases}$

$v_n = 13u_n - 4$ donc $v_{n+1} = 13u_{n+1} - 4 = 13\times\left(\frac{4}{10} - \frac{3}{10}\times u_n\right) - 4$

$= \frac{26}{5} - \frac{39}{10}u_n - 4 = \frac{6}{5} - \frac{39}{10}u_n = \frac{3}{10}\times\underbrace{(4 - 13u_n)}_{-v_n} = \frac{(-3)}{10}\times v_n.$

$(v_n)$ est donc une suite géométrique de 1er terme $v_1 = 13\times\frac{1}{2} - 4 = \frac{5}{2}$ et de raison $\frac{3}{10}$ donc $v_n = \frac{5}{2}\times\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$

b] $v_n + 4 = 13u_n$ donc $u_n = \frac{1}{13}(v_n + 4) = \frac{1}{13}\times\left(\frac{5}{2}\times\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} + 4\right)$

$v_{n+1} = \frac{4}{13} + \frac{5}{26}\times\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$

Exercice 2 : 2.

$p_n \to E_n$ : $\xrightarrow{1/10} E_{n+1}$ : $p(E_n \cap E_{n+1}) = \frac{1}{10} \times p_n$

$\xrightarrow{9/10} \overline{E_{n+1}}$

$1-p_n = q_n \to \overline{E_n}$ : $\xrightarrow{4/10} E_{n+1}$ : $p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = \frac{4}{10} \times q_n$.

$\xrightarrow{6/10} \overline{E_{n+1}}$

$E_n$ et $\overline{E_n}$ forment une partition, on peut donc utiliser la formule des probabilités totales

$$p(E_{n+1}) = p_{n+1} = p(E_n \cap E_{n+1}) + p(\overline{E_n} \cap E_{n+1})$$

$$\boxed{p_{n+1} = \frac{1}{10} \times p_n + \frac{4}{10} \times q_n}$$

$$p_{n+1} = \frac{1}{10} \times p_n + \frac{4}{10} \times (1 - p_n) = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} \times p_n.$$

avec $p_1 = 0,5$. On retrouve la même relation de récurrence que pour la suite $(u_n)$ et $u_1 = p_1 = 0,5$.

b) Par conséquent, les deux suites $(u_n)$ et $(p_n)$ sont égales et pour tout naturel $n$ $(n \geq 1)$, on a :

$$p_n = \frac{4}{13} + \frac{5}{26} \times \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$$

Exercice 3 :

1)

$0,1 \to A_1$ : $\xrightarrow{0,6} A_2$ : $p(A_1 \cap A_2)$

$\xrightarrow{0,4} B_2$

$0,9 \to B_1$ : $\xrightarrow{0,2} A_2$ : $p(B_1 \cap A_2)$

$\xrightarrow{0,8} B_2$

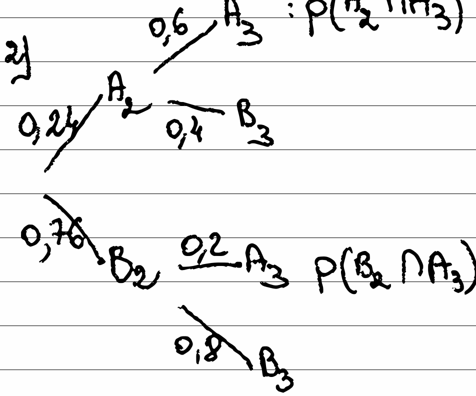
$A_1$ et $B_1$ forment une partition donc d'après la formule des probabilités totales

$$p(A_2) = p(A_1 \cap A_2) + p(B_1 \cap A_2)$$

donc $p(A_2) = 0,1 \times 0,6 + 0,9 \times 0,2$

$p(A_2) = 0,24$

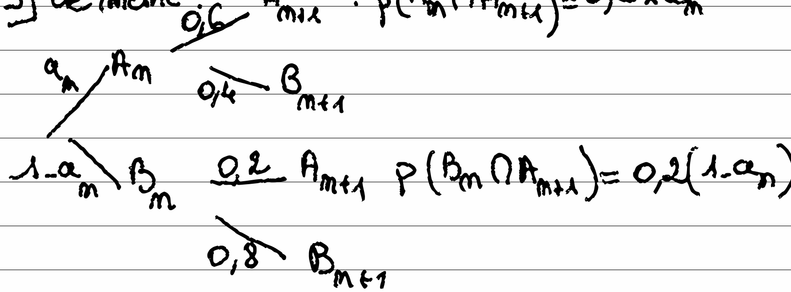
2)




$A_2$ et $B_2$ forment une partition : d'après la formule des probabilités totales.

$$p(A_3) = p(A_2 \cap A_3) + p(B_2 \cap A_3)$$
$$= 0,24 \times 0,6 + 0,76 \times 0,2$$
$$= 0,296 \approx 0,30$$

3) de même :




donc $a_{n+1} = p(A_{n+1}) = 0,6 a_n + 0,2(1-a_n) = 0,4 a_n + 0,2$

4) On montre par récurrence que $a_n = \frac{1}{3} \times (1 - 0,7 \times 0,4^{n-1})$ pour $\forall n \geq 1$

Initialisation : $\frac{1}{3} \times (1 - 0,7 \times 0,4^{1-1}) = \frac{1}{3}(1 - 0,7 \times 1) = 0,1 = a_1$

la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : On suppose que pour un naturel $k$, non nul,
$a_k = \frac{1}{3}(1 - 0,7 \times 0,4^{k-1})$

or $a_{k+1} = 0,4 a_k + 0,2$ (question 3)
$= 0,4 \times \frac{1}{3} \times (1 - 0,7 \times 0,4^{k-1}) + 0,2 \times \frac{3}{3}$
$= \frac{1}{3}(0,4 - 0,7 \times 0,4^{k} + 0,2 \times 3) = \frac{1}{3}(1 - 0,7 \times 0,4^{k})$.

cqfd

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire donc grâce au principe de démonstration par récurrence, on a :

pour tout naturel $n$, $n \geq 1$ : $a_n = \frac{1}{3}\left(1 - 0{,}7 \times 0{,}4^{n-1}\right)$

5) a) $a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0{,}7 \times 0{,}4^{n-1}$

or $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0{,}7 \times 0{,}4^{n-1} < \frac{1}{3}$

donc $a_n < 1$ : ce qui signifie que Jean a toujours moins d'une chance sur 3 de faire partie du groupe A.

b) Algorithme traduit en python :

```
def rang ( ):
    m = 0.3333
    a = 0.1
    n = 1
    while (a <m):
        n = n+1
        a = 0.4 *a + 0.2
    return n.
```

le programme retourne $n = 11$ donc à partir de la onzième semaine, Jean aura au moins 33,33% de chances d'être dans le groupe A.