Géométrie dans l'espace : repérage

1. Géométrie analytique dans l'espace

1.1. Repérage dans l'espace

Définition 1.

Un repère de l'espace est la donnée d'un point origine O et de trois vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ non coplanaires. On note alors $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$ ce repère. *Les repères peuvent être quelconques, orthogonaux, orthonormaux.*

Propriété 1.

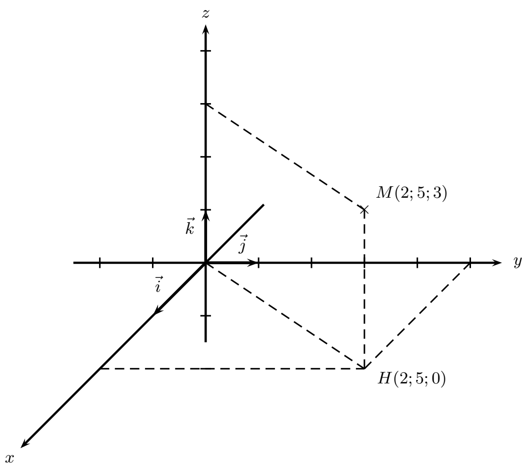
Soit un repère $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$ de l'espace.
Pour tout point M, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de réels tels que $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de réels tels que $\overrightarrow{v}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$.

Définition 2.

Ce triplet $(x;y;z)$ est alors appelé coordonnées, x **l'abscisse**, y **l'ordonnée** et z la **cote** du point M (resp. du vecteur $\overrightarrow{v}$) dans ce repère.

On note alors $M(x;y;z)$ d'une part, $\overrightarrow{v}(x;y;z)$ ou $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ d'autre part.

Application :



1.2. Calcul de coordonnées

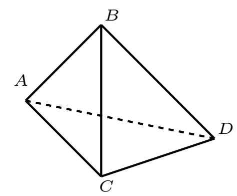
A partir de coordonnées de points

Théorème 2.

Dans l'espace, soient un repère $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$ et trois points $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ et $C(x_C;y_C;z_C)$, alors

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$;
- le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$;
- le centre de gravité du triangle ABC a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$;

Exemple 1. Montrer que les segments qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre sont concourants en leur milieu.



A partir d'opérations sur les vecteurs

Théorème 3.

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et un réel λ, alors

- le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$;
- le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}$.

Propriété 4.

Conséquence : Deux vecteurs sont colinéaires si et seulementsi leurs coordonnées sont proportionnelles.

2.Droites de l'espace

2.1. Exercice

Exemple 2. Soient $A(2;3;1)$, $B(5;-2;3)$ et $C(-4;13;z)$ trois points du plan ou de l'espace. Trouver la valeur de z telle que A, B et C soient alignés

2.2. Représentation paramétrique

Définition 3.

Système d'équations paramétriques d'une droite

Si l'espace est muni d'un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, et $M(x;y;z)$, alors M appartient à une droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & x_A & + & t\,x_{\vec{u}} \\ y & = & y_A & + & t\,y_{\vec{u}} \\ z & = & z_A & + & t\,z_{\vec{u}} \end{array}\right. \qquad \text{où } t \text{ est un paramètre réel.}$$

Ceci constitue un système d'équations paramétriques de la droite $d(A,\vec{u})$

Application

Soient le point $A(1;-4;3)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}(5;1;-2)$.

Alors la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ admet pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{ll} x & = 1+5t \\ y & = -4+t \\ z & = 3-2t \end{array}\right.$$

c'est-à-dire qu'un point $M(x;y;z)$ appartient à cette droite si et seulement si ses coordonnées $(x;y;z)$ vérifient ce système d'équations.

Remarque 1. Le **segment** $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ avec $t \in [0;1]$.

Exemple 3.

① Dans le cube $ABCDEFHH$, on considère le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$. Déterminer un système d'équations paramétrique de (BH), puis de la parallèle d à (BH) passant par G.

② Trouver deux points et un vecteur directeur de $d : \left\{\begin{array}{lll} x & = & -3 \\ y & = & 4+2t \\ z & = & -t \end{array}\right.$.

③ Dire si $A(-3;6;-1)$ et $B(-3;-4;3)$ appartiennent à la droite d précédemment définie.

④ Position relative de d et (MN) où $M(3;0;3)$ et $N(0;3;1)$?