Correction Interrogation Sujet 1.

Question de cours : Une suite décroissante minorée par m converge vers une limite (réelle) ℓ avec $m \leq \ell$

Exercice 1 : Pour n naturel non nul, $d_n = \dfrac{1-4n}{3\cos 2n - 5}$.

1. Par propriété de la fonction cosinus, on a : $-1 \leq \cos(2n) \leq 1$
En multipliant par 3 chaque membre de l'inégalité : $-3 \leq 3\cos(2n) \leq 3$
En ajoutant (-5) : $-8 \leq 3\cos(2n) - 5 \leq -2 < 0$
Comme la fonction* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$,

*inverse

$$\frac{1}{-8} \geq \frac{1}{3\cos 2n - 5} \geq \frac{1}{-2}$$

En multipliant par $1-4n$ (qui est strictement négatif), on obtient :

$$\frac{1-4n}{-8} \leq \frac{1-4n}{3\cos(2n)-5} \leq \frac{1-4n}{-2}$$

d'où

$$\frac{4n-1}{8} \leq d_n$$

2. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4n-1}{8} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{4}{8}n - \dfrac{1}{8}\right) = +\infty$ (d'après les règles opératoires sur les limites)

Grâce au théorème de comparaison sur les limites de suites, on peut conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} d_n = +\infty.$$

Exercice 2 : Pour tout entier n, $n \geq 3$. $u_n = \dfrac{3n + (-1)^n \sin n}{2-n}$

1. Par propriété de la fonction sinus, $-1 \leq \sin n \leq 1$ et comme $(-1)^n = 1$ ou (-1) (suivant la parité de n), on a pour tout $n \geq 3$

$$-1 \leq (-1)^n \sin n \leq 1$$

$+3n$: $3n - 1 \leq 3n + (-1)^n \sin n \leq 3n + 1$ $\quad) + 3n$

$$\frac{3n-1}{2-n} \geq u_n \geq \frac{3n+1}{2-n}$$

$\div (2-n)$ qui est strict. négatif d'où le chgt. d'ordre des inégalités

2. $\dfrac{3n-1}{2-n} = \dfrac{3n\left(1-\frac{1}{3n}\right)}{-n\left(\frac{2}{-n}+1\right)} = -3\,\dfrac{\left(1-\frac{1}{3n}\right)}{\left(1-\frac{2}{n}\right)}$

a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{1}{3n} = 1+0 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{2}{n} = 1$ (par somme)

donc par produit et quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n-1}{2-n} = -3$

De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+1}{2-n} = -3$

3. Comme $\dfrac{3n+1}{2-n} \leq u_n \leq \dfrac{3n-1}{2-n}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+1}{2-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n-1}{2-n}$

on peut appliquer le théorème des gendarmes pour conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe et vaut -3.

<u>Exercice 4 :</u> $G(-2;7;4)$ $E(2;1;-1)$ et $F(1;1;2)$

1. $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}4\\-6\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}3\\-6\\-2\end{pmatrix}$ $\quad \dfrac{4}{3} \neq \dfrac{-6}{-6}$ donc les coordonnées de $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FG}$ ne sont pas proportionnelles, les vecteurs ne sont pas COLINEAIRES donc les pts E, F, G ne sont alignés.

2. <u>Pour F(1;1;2)</u>

$2t = 1$ donne $t = 1/2$ et $-3+4t = 1$ donne $t = 1$

Il n'existe pas de reel t qui vérifie $\begin{cases} 1 = 2t \\ 1 = -3+4t \\ 2 = 7-8t \end{cases}$; par conséquent

coord de F

F n'appartient pas à D

$\begin{cases} 2 = 2t \\ 1 = -3+4t \\ -1 = 7-8t \end{cases}$ donne $\begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$ donc E appartient à D.

3. En prenant les coefficients devant le paramètre t dans la représentation paramétrique on a $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\\-8\end{pmatrix}$ vecteur directeur de D et

$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ vecteur directeur de Δ.

4. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (car coord. non proportionnelles), les droites D et Δ ne sont donc pas parallèles, elles sont soit sécantes, soit non coplanaires.
On cherche si le système suivant a des solutions.

$$(S)\begin{cases} 2t = -2+t' & L_1 \\ -3+4t = 1+t' & L_2 \\ 7-8t = -1-t' & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} 2t = -2+t' \\ 7-8t = -1-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-6t = -3 \\ 2t+2 = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \\ t' = 2\times\frac{5}{3}+2 = \frac{16}{3} \end{cases}$$

On vérifie dans L_2 : $\left.\begin{matrix} -3+4t = -3+4\times\frac{5}{3} = \frac{11}{3} \\ -1-t' = -1-\frac{16}{3} = -\frac{19}{3} \end{matrix}\right\} \neq$

Le système de départ (S) n'a pas de solutions : les droites D et Δ ne sont pas coplanaires.