Correction Interrogation Sujet 1.

<u>Question de cours</u> : Une suite croissante majorée par M converge vers une limite (réelle) ℓ avec $\ell \leq M$

<u>Exercice 1</u> : Pour n naturel non nul, $d_n = \dfrac{2-4n}{3\sin(2n)-8}$

1. Par propriété de la fonction sinus, on a : $-1 \leq \sin(2n) \leq 1$
En multipliant par 3 chaque membre de l'inégalité : $-3 \leq 3\sin(2n) \leq 3$
En ajoutant (-8) : $-11 \leq 3\sin(2n)-8 \leq -5 < 0$
Comme la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$,

$$\frac{1}{-11} \geq \frac{1}{3\sin(2n)-8} \geq \frac{1}{-5}$$

En multipliant par $2-4n$ (qui est strictement négatif), on obtient :

$$\frac{2-4n}{-11} \leq \underbrace{\frac{2-4n}{3\sin(2n)-8}}_{d_n} \leq \frac{2-4n}{-5}$$

d'où

$$\frac{4n-2}{11} \leq d_n$$

2. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n-2}{11} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{11}n - \dfrac{2}{11}\right) = +\infty$ (d'après les règles opératoires sur les limites)

Grâce au théorème de comparaison sur les limites de suites, on peut conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} d_n = +\infty.$$

<u>Exercice 2</u> : Pour tout entier n, $n \geq 4$: $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n\cos n}{3-n}$

1. Par propriété de la fonction cosinus, $-1 \leq \cos n \leq 1$ et comme $(-1)^n = 1$ ou (-1) (suivant la parité de n), on a pour tout $n \geq 4$

$-1 \leq (-1)^n \cos n \leq 1$

$+2n$: $2n-1 \leq 2n+(-1)^n\cos n \leq 2n+1$ $\quad) +2n$

$\dfrac{2n-1}{3-n} \geq u_n \geq \dfrac{2n+1}{3-n}$ $\quad) \div (3-n)$ qui est strict. négatif d'où le chg^t d'ordre des inégalités

2. $\dfrac{2n-1}{3-n} = \dfrac{2n\left(1-\frac{1}{2n}\right)}{-n\left(\frac{3}{-n}+1\right)} = -2 \times \dfrac{1-\frac{1}{2n}}{1-\frac{3}{n}}$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{1}{2n} = 1+0=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{3}{n} = 1$ (par somme)

donc par produit et quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{3-n} = -2$.

De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{3-n} = -2$.

3. Comme $\dfrac{2n+1}{3-n} \leq u_n \leq \dfrac{2n-1}{3-n}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{3-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{3-n}$

on peut appliquer le théorème des gendarmes pour conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe et vaut -2.

<u>Exercice 4 :</u> $E(-2;7;4)$ $F(2;1;-1)$ et $G(1;1;2)$

1. $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}4\\-6\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}3\\-6\\-2\end{pmatrix}$ $\dfrac{4}{3} \neq \dfrac{-6}{-6}$ donc les coordonnées de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne sont pas proportionnelles, les vecteurs ne sont pas COLINEAIRES donc les pts E, F, G ne sont alignés.

2. $2t=-2$ donne $t=-1$ et $-3+4t=7$ donne $t=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}$

Il n'existe pas de réel t qui vérifie $\begin{cases} -2 = 2t \\ 7 = -3+4t \\ 4 = 7-8t \end{cases}$; par conséquent

E n'appartient pas à D

$\begin{cases} 2=2t \\ 1=-3+4t \\ -1 = 7-8t \end{cases}$ donne $\begin{cases} t=1 \\ t=1 \\ t=1 \end{cases}$ donc F appartient à D.

3. En prenant les coefficients devant le paramètre t dans la représentation paramétrique on a $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\\-8\end{pmatrix}$ vecteur directeur de D et

$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ vecteur directeur de Δ.

4. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (car coord. non proportionnelles), les droites D et Δ ne sont donc pas parallèles, elles sont soit sécantes, soit non coplanaires.
On cherche si le système suivant a des solutions.

$$(S)\begin{cases} 2t = -2+t' & L_1 \\ -3+4t = 1+t' & L_2 \\ 7-8t = -1-t' & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} 2t = -2+t' \\ 7-8t = -1-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-6t = -3 \\ 2t+2 = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}. \\ t' = 2\times\frac{5}{3}+2 = \frac{16}{3} \end{cases}$$

On vérifie dans L_2 : $\left.\begin{array}{l} -3+4t = -3+4\times\frac{5}{3} = \frac{11}{3} \\ -1-t' = -1-\frac{16}{3} = -\frac{19}{3} \end{array}\right\} \neq$

le système de départ (S) n'a pas de solutions : les droites D et Δ ne sont pas coplanaires.