# Continuité

## 1. Continuité

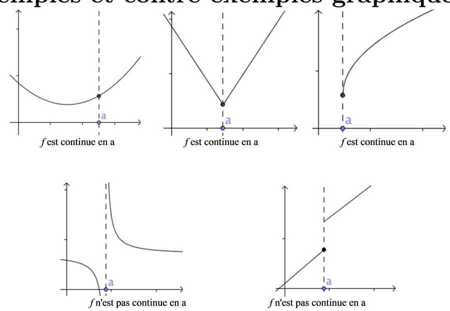
### 1.1. Définition, exemples et contre-exemples

**Définition 1.**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a$ un nombre réel de $I$.

- La fonction $f$ est dite *continue en a* si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire que lorsque $x$ est proche de $a$, le réel $f(x)$ est proche du réel $f(a)$.
- $f$ est dite *continue sur* $I$ si elle est continue en tout réel $a \in I$.

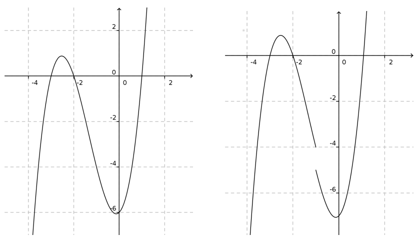
**Exemples et contre-exemples graphiques :**




La courbe d'une fonction continue se trace sans lever le crayon sur tout intervalle de l'ensemble de définition où elle est continue.

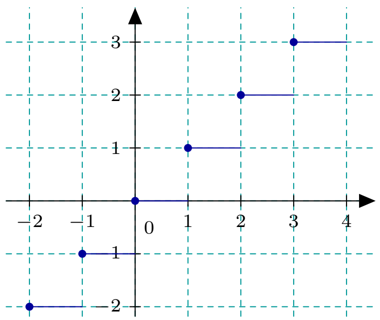
**Exemple et contre-exemples à partir d'une expression**

Ci-dessous les courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$,



$f$ définie par :
$f(x) = (x+2)(x-1)(x+3)$ sur $\mathbb{R}$, $f$ est continue sur $]-\infty;+\infty[$ alors que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ sur} ]-\infty;-1] \\ f(x)-1 \text{ sur} ]-1;+\infty[ \end{cases}$$
n'est pas continue en $-1$.

La fonction *partie entière* E, définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{E}(x) = n$ où $n \in \mathbb{Z}$ avec $n \leqslant x < n+1$.
• on a $\mathrm{E}(4,1) = 4$ et $\mathrm{E}(-4,1) = -5$ ;
• la représentation graphique de E est une *fonction en escalier* ;
La fonction E n'est pas continue pour $x \in \mathbb{Z}$ et continue pour $x \notin \mathbb{Z}$.



### 1.2. Continuité des fonctions usuelles

**Propriété 1.**

- $x \mapsto \exp(x)$, les fonctions polynômes, la fonction valeur absolue, la fonction cosinus et la fonction sinus sont continues sur $]-\infty;+\infty[$ ;
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$ (alors qu'elle n'est dérivable que sur $]0;+\infty[$) ;
- la fonction inverse est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

***Admis***

**Propriété 2.**

1. Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la somme $f+g$, le produit $\lambda \times f$, le produit $f \times g$, et $f^n$ (où $n$ est un naturel non nul) sont continus sur $I$. Si de plus, $g$ ne s'annule pas sur $I$, alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ **et** $\dfrac{f}{g}$ **sont continues sur** $I$.
2. Soit $v$ une fonction continue sur un intervalle $J$ et $u$ une fonction continue sur un intervalle $I$ tel que pour tout réel $x$ de $I$, $u(x)$ appartient à $J$. La fonction **composée** $v \circ u$ **est continue sur** $I$.

***Admis***

### 1.3. Exemple

Etudier la continuité de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -x+2 & \text{pour } x < 3 \\ f(x) = x-4 & \text{pour } 3 \leqslant x < 5 \\ f(x) = -2x+13 & \text{pour } x \geqslant 5 \end{cases}$$

### 1.4. Dérivabilité

**Propriété 3.**

Si $f$ est une fonction définie sur un intervalle $I$ et dérivable en un réel $a \in I$, alors $f$ est continue en $a$. En particulier, si $f$ est dérivable sur $I$, alors $f$ est continue sur $I$.

***Admis***

**Remarque 1.** *La réciproque n'est pas vraie comme le montre le contre exemple de la fonction racine carré en 0.*

**Remarque 2.** *Dans un tableau de variations, on admet que les* ***flèches*** *traduisent* ***la continuité*** *et la* ***stricte monotonie*** *de la fonction.*

## 2. Image d'une suite par une fonction continue

### 2.1. Image d'une suite par une fonction

**Définition 2.**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $(u_n)$ une suite telle que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $u_n \in I$.
L'image de la suite $(u_n)$ par la fonction $f$ est la suite $(f(u_n))$

***Exemple :*** $(u_n)$ est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n+3}{n+5}$ et $f$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Pour tout entier $n$, $\dfrac{2n+3}{n+5}$ est positif et donc l'image de la suite $(u_n)$ par la fonction $f$ est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $f(u_n) = \sqrt{\dfrac{2n+3}{n+5}}$ .

### 2.2. Image d'une suite convergente par une fonction continue

**Propriété 4.**

Si $(u_n)$ est une suite qui **converge** vers un nombre réel $l$ et si $I$ est un intervalle contenant $l$ et tous les termes de la suite $(u_n)$ alors pour toute fonction définie sur l'intervalle $I$ et **continue en** $l$, la suite $f(u_n)$ **converge vers le réel** $f(l)$.

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = l \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$$

***Admis***

***Exemple précédent :***

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{n+5} = 2 \\ \displaystyle\lim_{x\to 2} \sqrt{x} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2n+3}{n+5}} = \sqrt{2}$$

(la fonction racine carrée est continue en 2)

### 2.3. Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

**Propriété 5.**

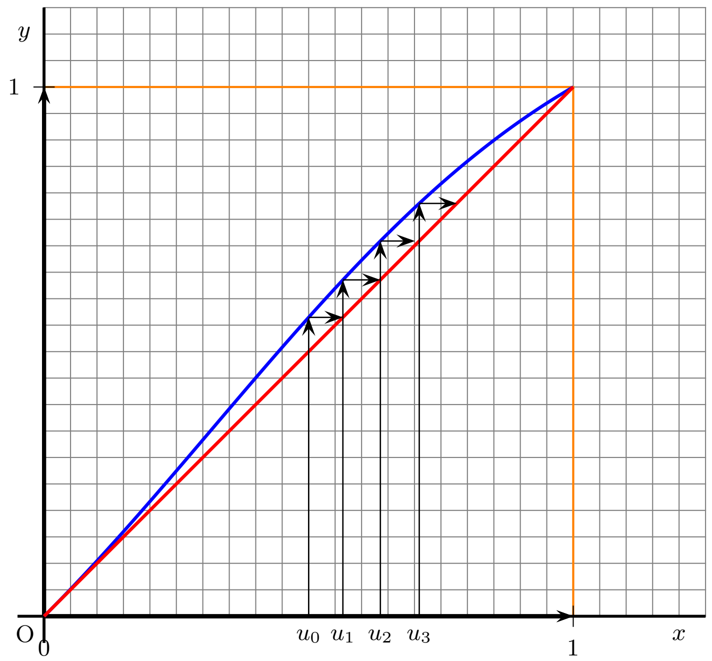
Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ tel que pour tout réel $x$ de $I$, $f(x) \in I$.
$(u_n)$ une suite définie, pour tout naturel $n$, par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$
Si la suite $(u_n)$ converge vers $l$ alors $l$ vérifie $l = f(l)$ .

***Exemple*** On considère la fonction $f$ définie sur $[0\,;\,1]$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$.
$f$ est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$, pour tout $x$ de $[0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\,;\,1]$, la courbe $(\mathcal{C})$ est au-dessus de la droite (D) la droite d'équation $y = x$ sur $]0\,;\,1[$.

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

Pour tout entier naturel $n$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ et on obtient :

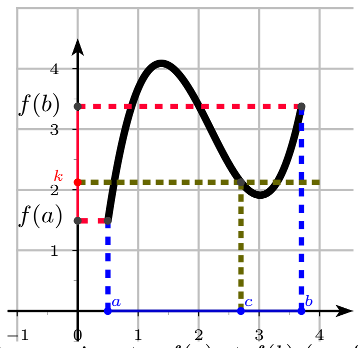



## 3. Théorème des valeurs intermédiaires

### 3.1. Propriété fondamentale des fonctions continues

**Propriété 6.**

**Théorème des valeurs intermédiaires** :
Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et soit $[a;b]$ un intervalle inclus dans $I$. Alors, pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c$ dans $[a;b]$ tel que $f(x) = k$.
***Admis***




**Cas particulier** Avec les hypothèses précédentes, si 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (ou $f(a)$ et $f(b)$ de signe contraire), alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$.

**Remarque 3.** *$f(a)$ n'est pas nécessairement inférieur à $f(b)$.*

Propriété 7.

**Corollaire du Théorème des valeurs intermédiaires :** Soit $f$ une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a;b]$.Alors, pour tout $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il **existe** un **unique** réel $c$ tel que $f(c)=k$.

| $x$ | $a$ | $c$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| | | | ... |
| $f$ | | ... | |
| | .... | | |

| $x$ | $a$ | $c$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| | ... | | |
| $f$ | | ... | |
| | | | ... |

Preuve (cas où $f$ est strictement croissante sur $[a;b]$)

**Cas particulier de l'équation** $f(x)=0$ Si $f$ est une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$ telle que $f(a)\times f(b)<0$, alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[a;b]$.

### 3.2. Généralisation à des intervalles quelconques

Propriété 8.

Le Théorème des valeurs intermédiaires admet les généralisations suivantes : Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I$ admettant aux bornes de $I$ des limites finies ou infinies $\alpha$ et $\beta$. Alors pour tout réel $k$ entre $\alpha$ et $\beta$, il existe un unique $c$ de l'intervalle $I$ tel que $f(c)=k$.
$I$ peut être de la forme $[a;+\infty[$ ou $I=[a;b[$ ou $I=]-\infty;b[$......

Exemples entre autres :

| $x$ | $a$ | $c$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| | | | ... |
| $f$ | | ... | |
| | .... | | |

| $x$ | $a$ | $c$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| | | ... | \|\| |
| $f$ | | ... | \|\| |
| | ... | | \|\| |

### 3.3. Encadrement de la solution par méthode algorithmique

Lorsqu'on ne peut pas déterminer algébriquement les solutions de l'équation $f(x)=k$, on obtient des valeurs approchées de ces solutions par des méthodes algorithmiques.
cf TP 1 page 126.