Activité d'introduction à la représentation paramétrique d'une droite. (extrait du livre Variations, chez Hatier)

Représentation paramétrique d'une droite

On considère la droite (d) passant par le point A(5 ; 4 ; 7) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. On rappelle l'équivalence :

« Un point M appartient à la droite (d)
si et seulement s'il existe un nombre réel α tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$. »

a. M a pour coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$. Recopier et compléter les équivalences suivantes.

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \ldots = \alpha \times \ldots \\ y - \ldots = \alpha \times \ldots \\ z - \ldots = \alpha \times \ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ldots + \ldots\alpha \\ y = \ldots + \ldots\alpha \\ z = \ldots + \ldots\alpha \end{cases}$$

Ce dernier système forme une **représentation paramétrique** de la droite (d), de paramètre α.

b. À l'aide de ce système, déterminer si les points B(17 ; 0 ; 15) et C(–4 ; 7 ; 2) appartiennent à la droite (d).

2. On considère la droite (d') passant par les points D(4 ; 6 ; –7) et E(6 ; 5 ; –3).
En vous aidant de la question **1**, donner une représentation paramétrique de la droite (d') de paramètre β.

3. Méline affirme que les droites (d) et (d') sont sécantes en un point F dont elle peut donner les coordonnées. Valider l'affirmation de Méline.

Corrigé :

1. a. $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = \alpha \times 3 \\ y - 4 = \alpha \times (-1) \\ z - 7 = \alpha \times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 3\alpha \\ y = 4 - \alpha \\ z = 7 + 2\alpha \end{cases}$

b. $\begin{cases} 17 = 5 + 3\alpha \\ 0 = 4 - \alpha \\ 15 = 7 + 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \alpha = 4 \\ \alpha = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 4$, donc B appartient à la droite (d).

$\begin{cases} -4 = 5 + 3\alpha \\ 7 = 4 - \alpha \\ 2 = 7 + 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \alpha = -3 \\ \alpha = -\frac{4}{3} \end{cases}$ ce qui est impossible, donc C n'appartient pas à la droite (d).

2. $\begin{cases} x = 4 + 2\beta \\ y = 6 - \beta \\ z = -7 + 4\beta \end{cases}$.

3. On résout le système $\begin{cases} 5 + 3\alpha = 4 + 2\beta \\ 4 - \alpha = 6 - \beta \\ 7 + 2\alpha = -7 + 4\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 5 \end{cases}$.

En remplaçant dans l'une des deux représentations paramétriques, on obtient F(14 ; 1 ; 13).