Logarithme

1. La fonction réciproque de la fonction exponentielle

On a vu que :

- La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- De plus : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
  Autrement dit, grâce au théorème des valeurs intermédiaires généralisé, pour tout réel $a \in]0\,;\,+\infty[$ il existe un unique réel $b \in \mathbb{R}$ tels que $a = e^b$.
  On envisage alors sa fonction réciproque , fonction qui à toute image a par la fonction exponentielle associe son antécédent b .

Ainsi : Cette fonction est définie sur $]0\,;\,+\infty[$
Elle permet de résoudre des équations du type : $e^x = 3$

x	$-\infty$	b	$+\infty$
exp	0	a	$+\infty$

Définition La fonction, définie sur $]0;+\infty[$, qui à x associe $\ln(x)$ est appelée **fonction logarithme népérien** :

$$\ln :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \ln(x)$$

.

- Elle est définie sur $]0\,;\,+\infty[$
- Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $\ln x$ est l'unique antécédent de x par la fonction exp.

Propriété 1.

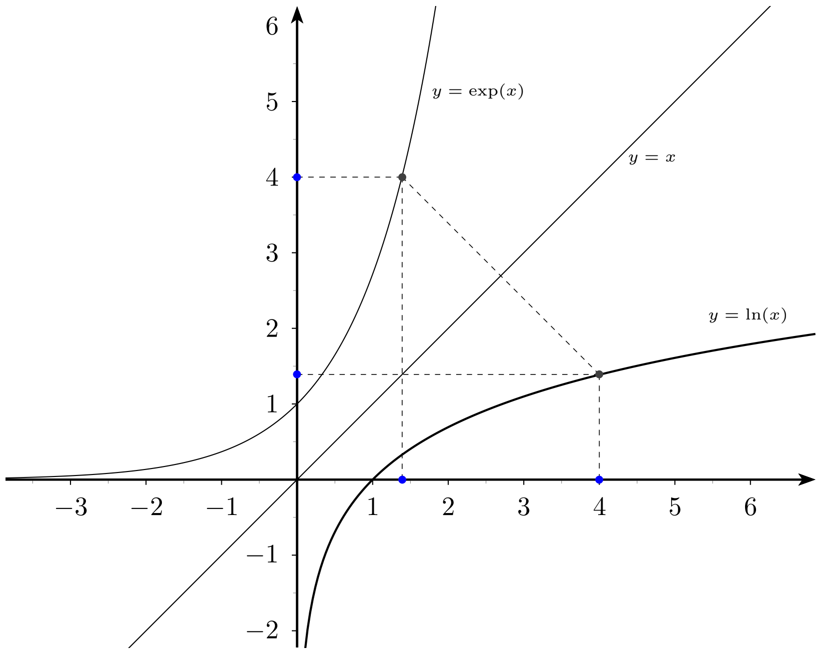
- Pour tout réel $x > 0$ et tout réel y : $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$
- Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $e^{\ln x} = x$.
- Pour tout réel x, $\ln\left(e^x\right) = x$.

Corollaire.

- $\ln(1) = 0$.
- $\ln(e) = 1$

Symétrie de deux représentations graphiques

Deux fonction réciproques sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$) dans un repère orthonormé.
Les représentations graphiques des fonctions ln et exp sont donc symétriques.



2. Propriétés algébriques

Théorème 2.

Pour tous réels $x, y > 0$ et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, on a :

① $\ln(x\,y) = \ln(x) + \ln(y)$ ② $\ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\ln(y)$

③ $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

④ $\ln(x^n) = n\ln(x)$ ⑤ $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$

3. Etude de la fonction logarithme népérien

3.1. Variations

Théorème 3.

ln est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0 \text{ pour tout } x > 0$$

De plus : $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

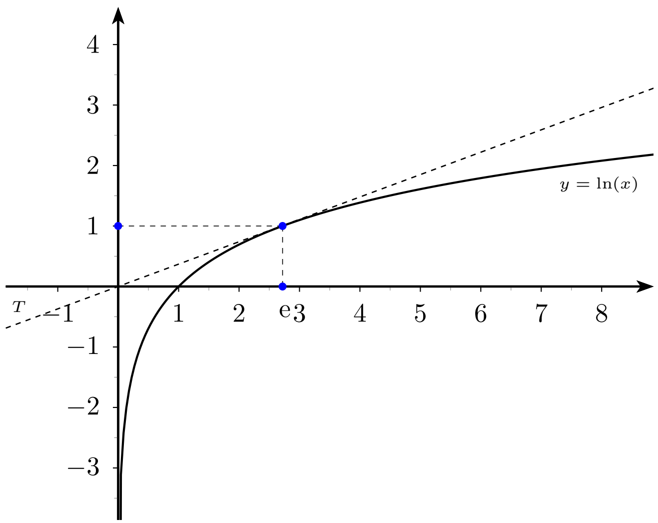
x	0		$+\infty$
ln			$+\infty$
		$\nearrow$	
	$-\infty$		

Propriété 4.

① Pour $a > 0$ et $b > 0$, on a : $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$
et $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$.

② $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

3.2. Représentation graphique



Équation de la tangente la courbe au point d'abscisse e :

$$T\ :\ y = f'(e)(x-e) + f(e), \quad f(e) = \ln(e) = 1, \quad f'(e) = (\ln)'(e) = \frac{1}{e}$$

$$T : y = \frac{1}{e}(x-e) + 1 = \frac{x}{e} - \frac{e}{e} + 1 \quad \boxed{T : y = \frac{x}{e}}.$$

3.3. Limites à connaître

Théorème 5.

D'après le taux d'accroissement en 1 :

① $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ② $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$

Théorème 6.

Théorème des croissances comparées.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

① $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ ② $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$

③ $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ ④ $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln(x) = 0$

4. Fonction composée $\ln u$

Théorème 7.

u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. Alors la fonction $\ln u : x \longmapsto \ln(u(x))$ est une fonction dérivable sur I et pour tout x de I, $(\ln u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

5. Logarithme décimal

Définition Pour tout réel x strictement positif on note $\log(x)$ le logarithme décimal défini par : $\boxed{\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}}$

Propriété 8.

- Pour tout entier relatif n, $\boxed{\log(10^n) = n}$.
- Pour tout réel x strictement positif et pour tout réel y $\boxed{\log(x) = y \iff x = 10^y}$.