Exponentielle complexe

vendredi 29 mai 2020 09:06

Exercice 168 page 270

168. On pose :

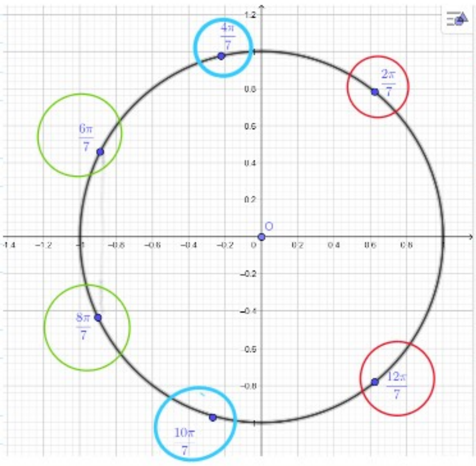
$S = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$;

$S' = \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7} + \cos\frac{12\pi}{7}$;

$\Sigma = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7}$;

$\Sigma' = \sin\frac{8\pi}{7} + \sin\frac{10\pi}{7} + \sin\frac{12\pi}{7}$.

1. Comparer S et S' puis Σ et Σ'.
2. Exprimer $S + S' + i(\Sigma + \Sigma')$ en fonction de $z = e^{i\frac{2\pi}{7}} \left(= \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right)$.
3. En déduire alors la valeur de $S + S' + i(\Sigma + \Sigma')$ puis la valeur de S.



$\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$

$\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$ en remplaçant x par $\frac{\pi}{7}$

$\pi + \frac{\pi}{7} = \frac{7\pi}{7} + \frac{\pi}{7} = \frac{8\pi}{7}$

$\pi - \frac{\pi}{7} = \frac{6\pi}{7}$

$\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{10\pi}{7}\right)$

$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{12\pi}{7}\right)$ ✗

donc $S = S'$

✗ ou

$x = \frac{2\pi}{7}\ (2\pi)$; $-x = -\frac{2\pi}{7}\ (2\pi)$.

$= -\frac{2\pi}{7} + \frac{14\pi}{7} \pmod{2\pi}$

$= \frac{12\pi}{7} \pmod{2\pi}$

de même, $\sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x)$

* $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) = -\sin\left(\frac{12\pi}{2}\right)$
* $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) = -\sin\left(\frac{10\pi}{7}\right)$
* $\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) = -\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$

$\Sigma = -\Sigma'$

1) $S = S'$ et $\Sigma = -\Sigma'$

2) $S + S' + i(\Sigma + \Sigma') = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7} + \cos\frac{12\pi}{7}$
$+ i\sin\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{8\pi}{7} + i\sin\frac{10\pi}{7} + i\sin\frac{12\pi}{7}$

$= e^{2i\pi/7} + e^{4\pi i/7} + e^{6i\pi/7} + e^{8i\pi/7} + e^{10i\pi/7} + e^{12i\pi/7}$

$= z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$ la somme des 1ers termes d'une suite géométrique de 1er terme z et de raison z.

$\times z$
$z + z^2 + \dots + z^6 = $ somme
$z^2 + z^3 + \dots + z^7 = z \times$ somme

$L_1 - L_2 = z - z^7 = $ somme $- z \times$ somme $=$ somme $\times (1 - z)$

$\frac{z - z^7}{1 - z} = $ somme

A terminer.

Produit scalaire

jeudi 28 mai 2020 18:21

ex wooclap

$EF = 3$, $EG = 5$ $\widehat{FEG} = 40°$ $FG = ?$

$\vec{EF}\cdot\vec{EG} = \underbrace{EF \times EG} \times \cos\widehat{FEG} = \underline{15}\cos 40° = \frac{1}{2}\left(EF^2 + EG^2 - FG^2\right) = \frac{1}{2}\left(9 + 25 - FG^2\right)$

$15 \times \cos 40° = 17 - \frac{1}{2}FG^2$

$(-2) \times \left(15 \times \cos 40° - 17\right) = FG^2$

donc $FG = \sqrt{2 \times (17 - 15\cos 40)} \approx 3{,}3$

ex 2 : $AB = 4$ $AC = 7$ $BC = 9$ $\widehat{ABC} = ?$

$\vec{BA}\cdot\vec{BC} = BA \times BC \times \cos\widehat{ABC} = 4 \times 9 \times \cos\widehat{ABC} = 36\cos\widehat{ABC}$

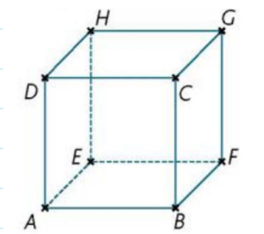
$= \frac{1}{2}\left(BA^2 + BC^2 - AC^2\right) = \frac{1}{2}\left(16 + 81 - 49\right) = 24$

$36\cos\widehat{ABC} = 24$

donc $\cos\widehat{ABC} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

$\widehat{ABC} \approx 48°$

ex 3 ABCDEFGH cube de côté 5



$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \vec{AB}\cdot\vec{AB} = AB \times AB = 5 \times 5 = 25$

$\vec{AB}\cdot\vec{DC} = \vec{AB}\cdot\vec{AB} = 25$

$\vec{EF}\cdot\vec{AD} = 0$ car $\vec{EF}$, $\vec{AD}$ orthogonaux.

$\vec{AC}\cdot\vec{HD} = \vec{DD}\cdot\vec{HD}$ car D est le projeté de A et de C sur (HD)

$= 0$

$\vec{AH}\cdot\vec{BG} = \vec{AH}\cdot\vec{AH} = AH^2 = AD^2 + DH^2$ (th de Pythagore dans ADH)

$= 50$

$\vec{FC}\cdot\vec{FD} = \vec{FC}\cdot\vec{FC} = FC^2 = 50$