Suites et intégrales : page 1

mercredi 29 avril 2020 08:55

RITUEL : calculer $\displaystyle\int_{10}^{20} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,dt$

$$\int_{10}^{20} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,dt = \int_{10}^{20} -\frac{10}{\ln 5}\times\underbrace{\left(-\frac{\ln 5}{10}\right)}_{u'}\times \underbrace{e^{-\frac{\ln 5}{10}t}}_{e^u}\,dt = \left[-\frac{10}{\ln 5}\times e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right]_{10}^{20}$$

on pose $u(t) = -\frac{\ln 5}{10}t$ donc $u'(t) = -\frac{\ln 5}{10}$.

constante

$$\int u'e^u = e^u$$

$$\int_{10}^{20} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,dt = \left(-\frac{10}{\ln 5}\times e^{-2\ln 5}\right) - \left(-\frac{10}{\ln 5}e^{-\ln 5}\right) = \frac{10}{\ln 5}\left(e^{-\ln 5} - e^{-2\ln 5}\right)$$

$\approx 0{,}99$

Suites et intégrales : page 2

mercredi 29 avril 2020 09:11

Exercice 142 page 212.

f est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$

1) f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
Var. de f	$\frac{\ln 3}{3}$ ↘	0

2a) $n \leq x \leq n+1$

$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$ car f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$

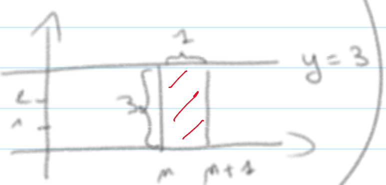
$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

b) $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$

Pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

$(*)\ \displaystyle\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx$ conservation de l'ordre par intégration $n < n+1$

(ex $\displaystyle\int_n^{n+1} 3\,dx = \Big[3x\Big]_n^{n+1} = 3(n+1)-3n = 3$



)

or $\displaystyle\int_n^{n+1} \underbrace{f(n+1)}_{\text{Constante}}\,dx = f(n+1)\times(n+1-n) = f(n+1)$

$\displaystyle\int_n^{n+1} f(n)\,dx = f(n)$

la double inégalité devient $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$

c) On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n+1)=0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n)=0$

identiques

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$ existe et vaut 0.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \to +\infty} u_n$ existe et vaut 0.

* facultatif

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n \to +\infty} n+1 = +\infty . \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\}$$

Par composée,

$$\lim_{n \to +\infty} f(n+1) = 0$$

Exercice 142 page 212.

f est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$

3) $F(x)=\left(\ln(x+3)\right)^2$

a)

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{u} & [\ln 3;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x+3) & \xrightarrow{\text{carré}} & \left(\ln(x+3)\right)^2 \end{array}$$

$x\geq 0$ donc $x+3\geq 3$ donc $\ln(x+3)\geq \ln 3$

* u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (cf question 1)
* la fonction carré est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc ici sur $[\ln 3;+\infty[$

donc la composée est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ avec F sous la forme u^2

$(u^2)'=2u'\times u$

$$F'(x)=2\times\frac{1}{x+3}\times\ln(x+3)=2\times\frac{\ln(x+3)}{x+3}=2f(x)$$

b)

$$I_n=\int_0^n f(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}F(x)\right]_0^n=\boxed{\frac{1}{2}\left(\ln(n+3)\right)^2-\frac{1}{2}\left(\ln 3\right)^2}$$

4) $S_n=u_0+u_1+\dots\dots+u_{n-1}$

$$S_n=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx+\dots\dots+\int_{n-1}^n f(x)\,dx$$

$$S_n=\int_0^n f(x)\,dx=I_n$$

relation de Chasles

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+3)=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}X^2=+\infty\end{array}\right\}\text{ Par composée }\lim_{n\to+\infty}\left(\ln(n+3)\right)^2$$

Grâce aux propriétés opératoires, $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$

(S_n) diverge.

Loi exponentielle : page 2

mercredi 29 avril 2020 09:19

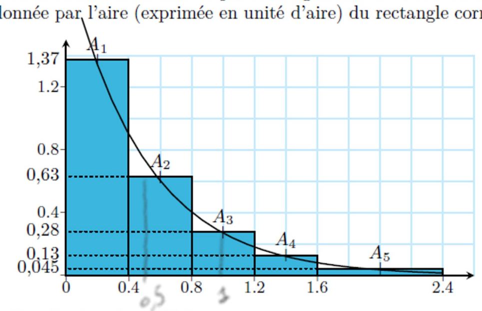
Activité :

Vers la loi exponentielle

Plusieurs fois dans la semaine, lorsqu'il revient du lycée, Karim doit sortir le linge de la machine à laver familiale et l'étendre.

Pour une étude statistique, on a relevé 100 fois le temps écoulé (en heure) entre le moment où il rentre chez lui et celui où il s'acquitte de cette tâche.

Les résultats sont donnés par l'histogramme ci-contre où la fréquence d'une classe est donnée par l'aire (exprimée en unité d'aire) du rectangle correspondant à cette classe.



Partie A : Avec l'histogramme

1. Avec quelle fréquence Karim a-t-il mis entre 0 et 24 minutes avant de sortir le linge ?
2. Aujourd'hui Karim va devoir rentrer du lycée et étendre le linge : on considère la variable aléatoire X donnant le temps qui s'écoulera (en heure) entre le moment où il rentrera chez lui et celui où il s'acquittera de sa tâche.
   (a) Préciser toutes les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X.
   (b) En utilisant l'histogramme de manière prédictive, proposer une valeur de $P(0{,}5 \leqslant X \leqslant 1)$.

1) 24 minutes $= 0{,}4$ H. $\left(\frac{24}{60} = 0{,}4\right)$

la fréquence cherchée correspond à l'aire du 1er rectangle.

$f = 1{,}37 \times 0{,}4 = 0{,}548$ donc Karim met entre 0 et 24 minutes dans 54,8% des cas.

2 a) X prend ses valeurs dans $[0 ; 2{,}4]$

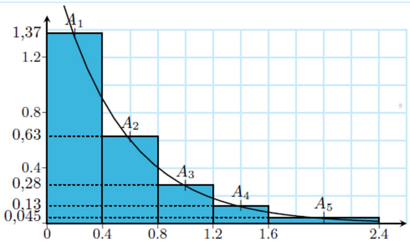
b) $P(0{,}5 \leq X \leq 1) = 0{,}3 \times 0{,}63 + 0{,}2 \times 0{,}28$
$= 0{,}245$.

Loi exponentielle : page 1

mercredi 29 avril 2020 09:26

Activité :

L'objet de la partie **B.** est de déterminer une fonction de densité continue possible pour X.



Partie B : Vers une fonction de densité

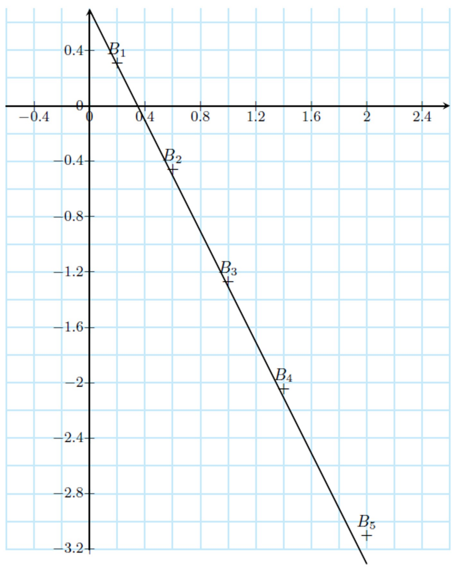
Sur le graphique de l'histogramme, les points A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5,ne sont pas alignés. On cherche l'équation de la courbe qui ajuste le nuage de points.

1. Compléter le tableau suivant (arrondir y_i' à 0,01 près) :

Point A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Abscisse x_i	0,2	0,6	1	1,4	2
Ordonnée y_i	1,37	0,63	0,28	0,13	0,045
$y_i' = \ln(y_i)$	0,31	-0,46	-1,27	-2,04	-3,1

exp ln

2. Dans le repère orthonormé, on a placé les points de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i')$ pour i entier entre 1 et 5.



Ces points semblent pouvoir être « approchés » par une droite. Un logiciel propose pour équation $y' = -2x + \ln(2)$.

En utilisant cette droite d'équation $y' = -2x + \ln(2)$, déduire une fonction f dont la courbe « approche » les points A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 de manière satisfaisante.

$\ln y = y' = -2x + \ln 2$

exp

donc $y = e^{-2x + \ln 2}$

$y = e^{-2x} \times e^{\ln 2}$

$y = 2e^{-2x}$.

3. On admet que f est bien la fonction de densité de la variable aléatoire X sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (a) Déterminer $P(0{,}5 \leqslant X \leqslant 1)$ puis comparer avec le résultat obtenu à la question **2.b** de la **partie A.**
   (b) Déterminer la probabilité que Karim attende moins de 3h pour vider la machine à laver.

3) a) $P(0{,}5 \leq X \leq 1) = \int_{0{,}5}^{1} 2e^{-2x}\,dx$

$= \left[-e^{-2x}\right]_{0{,}5}^{1} = -e^{-2} - (-e^{-1})$

$= e^{-1} - e^{-2} \approx 0{,}232$

b) $P(X \leq 3) = \int_0^3 2e^{-2x}\,dx = \left[-e^{-2x}\right]_0^3$

$= -e^{-6} - (-e^{0}) = 1 - e^{-6} \approx 0{,}998$