Exercice 152 page 215

Pour tout naturel n, $u_{\boxed{n}} = \int_0^1 x^{\boxed{n}} \ln(x+1)\,dx$

1) Pour tout naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1)\,dx - \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1) - x^n \ln(x+1)\,dx \quad \text{(par linéarité)}$$

$$= \int_0^1 x^n \ln(x+1)(x-1)\,dx.$$

Pour x appartenant à $[0;1]$, $\boxed{x-1 \leq 0}$, $\boxed{x^n \geq 0}$

si $0 \leq x \leq 1$ alors $1 \leq x+1$

$\ln 1 \leq \ln(x+1)$ la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$\boxed{0 \leq \ln(x+1)}$

$x^n \ln(x+1)(x-1) \leq 0$. Comme $0 < 1$, on a :

$$\int_0^1 x^n \ln(x+1)(x-1)\,dx \leq 0$$

$u_{n+1} \leq u_n$

Pour tout naturel n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$: $n < n+1$, $u_n \geq u_{n+1}$

La suite (u_n) est donc décroissante.

Pour x dans $[0;1]$, on a $\ln(x+1) \geq 0$ et $x^n \geq 0$ donc $x^n \ln(x+1) \geq 0$.

Comme $0 < 1$ on a : $\int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx \geq 0$

Pour tout naturel n, $u_n \geq 0$

0 est un minorant

(u_n) est décroissante minorée par 0 ; elle est donc convergente vers ℓ réel avec $\ell \geq 0$

2) Pour x appartenant à $[0;1]$

$0 \leq x \leq 1$

$1 \leq x+1 \leq 2$

$\ln 1 \leq \ln(x+1) \leq \ln 2$) car la fonction ln est str. croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$

$0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \times \ln 2$) $\times x^n \geq 0$

Conservation de l'ordre par intégration $(0 < 1)$

$$\int_0^1 0 \, dx \leq u_n \leq \int_0^1 x^n \times \ln 2 \, dx$$

$$0 \leq u_n \leq \left[\frac{1}{n+1} \times x^{n+1} \times \ln 2\right]_0^1$$

$$0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{n+1} \times 1^{n+1} \times \ln 2\right) - \left(\frac{1}{n+1} \times 0^{n+1} \times \ln 2\right)$$

$$0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$. Grâce au th. des gendarmes, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$

Exercice 142 page 212

f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$

1) f est un quotient de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$:

$x \longmapsto x+3 \xmapsto{\ln} \ln(x+3)$ est dérivable comme composée sur $\mathbb{R}^+$
$x+3>0$

$x \longmapsto x+3$ (fonction affine)

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$\left(\ln \underbrace{(x+3)}_{u}\right)' = \dfrac{1}{x+3}$ $\qquad (\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x+3} \times (x+3) - \ln(x+3) \times 1}{(x+3)^2} = \dfrac{1 - \ln(x+3)}{(x+3)^2}$

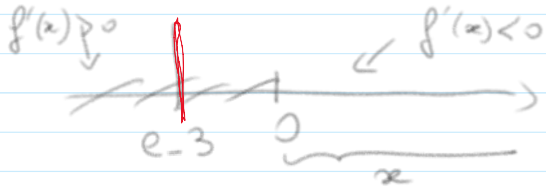
$1 - \ln(x+3) > 0 \iff 1 > \ln(x+3) \iff e^1 > x+3$ car la fonction exp est st. croissante sur $\mathbb{R}$

$\iff e - 3 > x$

or $e \simeq 2,7$ donc $e-3$ négatif

or $x \geq 0$ donc $x > e-3$ donc $1 - \ln(x+3) < 0$

$(x+3)^2 > 0$ donc $f'(x) < 0$ et f décroissante (strict) sur $\mathbb{R}^+$



On a une F.I du type "$\dfrac{\infty}{\infty}$"

th des croissances comparées : $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x + 3 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0 \end{array}\right\}$ Par composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+3)}{x+3} = 0.$