Exponentielle complexe.

mercredi 27 mai 2020 09:08

Linéarisation de $\sin^2 x$.

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^2}{(2i)^2} = \frac{(e^{ix})^2 - 2e^{ix} \times e^{-ix} + (e^{-ix})^2}{-4}$$

$$= \frac{e^{2ix} - 2e^0 + e^{-2ix}}{-4} = \frac{e^{2xi} + e^{-2ix}}{-4} + \frac{-2}{-4} = \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \cos 2x \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$$

$u' \cos u$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} - \frac{1 \times 2}{2 \times 2} \cos(\underbrace{2x}_{u}) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{4}\sin 0\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 - 0 = \frac{\pi}{4}$$

car pas primitive de $u' u^n$ d'où linéarisation

Primitive de $\cos x$ est $\sin x$

" de $u' \times \cos u$ est : $\sin u$

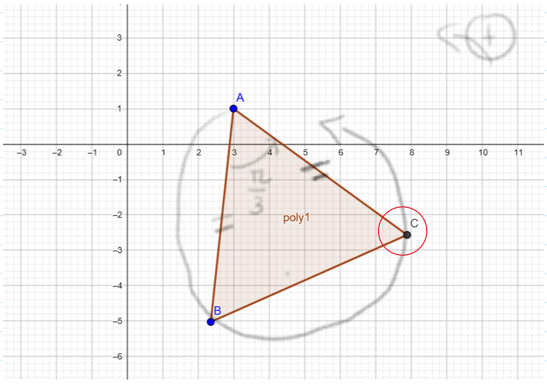
Exponentielle complexe.

mercredi 27 mai 2020 09:41

Exercice 205 page 274

205. Dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ on considère trois points distincts Ω, M et M' d'affixes respectives ω, z et z', tels que $\Omega M = \Omega M'$ et $(\overrightarrow{\Omega M}\,;\overrightarrow{\Omega M'}) = \theta\ (2\pi)$.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe : $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$.
2. En déduire que $z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$.
3. **Application :** On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 3+i$ et $z_B = 2-5i$. Déterminer l'affixe du point C tel que ABC soit un triangle équilatéral de sens direct.



1) $\left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = \dfrac{|z'-\omega|}{|z-\omega|} = \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$ * car $\Omega M = \Omega M'$

$|z'-\omega| = |z_{\overrightarrow{\Omega M'}}| = \Omega M'$

affixe de M' — affixe de Ω

$\arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = (\overrightarrow{\Omega M}\,;\overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \pmod{2\pi}$

donc $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega} = 1\times e^{i\theta} = e^{i\theta}$

2°) $z'-\omega = e^{i\theta}\times(z-\omega)$ $\quad +\omega$

$$\boxed{z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega}$$

3°) $\Omega M = \Omega M'$ et $(\overrightarrow{\Omega M}\,;\overrightarrow{\Omega M'}) = \theta\ (2\pi)$ traduit que $\boxed{\text{M' est l'image de M par la rotation de centre } \Omega \text{ et d'angle } \theta}$

ABC est équilatéral direct équivaut à C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$\Omega \longrightarrow A$
$M \longrightarrow B$
$M' \longrightarrow C$

$z_C = e^{i\pi/3}\times(z_B - z_A) + z_A$

$z_C = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\times(2-5i-3-i)+3+i$

$z_C = \left(\frac{1}{2} + i\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times(-1-6i)+3+i$

$z_C = -\frac{1}{2} - 3i - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 6i^2\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 3+i$

$z_C = -\frac{1}{2}+3+3\sqrt{3}+i\left(-3-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$

$$\boxed{z_C = \frac{5}{2}+3\sqrt{3}+i\left(-2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Exponentielle complexe.

mercredi 27 mai 2020 10:55

Formule de duplication

Formule de Moivre avec $n = 2$.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{2} = \cos 2\theta + i\sin 2\theta.$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = (\cos\theta)^2 + 2\cos\theta \times i\sin\theta + (i\sin\theta)^2$$

$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta + i \times 2\cos\theta\sin\theta$$

donc $\begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta. \end{cases}$

Formule de Moivre avec $n = 3$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta.$$

Hors programme pour préparer le supérieur : compléments non diffusés pendant la séance

: Calculer $\cos(\frac{\pi}{5})$, $\sin(\frac{\pi}{5})$, $\cos(\frac{2\pi}{5})$, $\sin(\frac{2\pi}{5})$. Posons $\theta = \frac{\pi}{5}$. On a $\sin(5\theta) = 0$. Or :

$$\sin(5\theta) = Im(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^5 = 5 \times \cos^4(\theta) \times \sin(\theta) - 10 \times \cos^2(\theta) \times \sin^3(\theta) + \sin^5(\theta)$$

$$= 5(1-\sin^2(\theta))^2 \times \sin(\theta) - 10(1-\sin^2(\theta)) \times \sin^3(\theta) + \sin^5(\theta)$$

$$= 5\sin(\theta) - 20\sin^3(\theta) + 16\sin^5(\theta)$$

$\Rightarrow \quad 16\sin^4(\theta) - 20\sin^2(\theta) + 5 = 0$

On trouve $\sin^2(\theta) = \dfrac{10 \pm \sqrt{20}}{16} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$

La même formule s'applique pour $\theta = \frac{2\pi}{5}$. Donc :

$$\sin^2(\frac{\pi}{5}) = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

$$\sin^2(\frac{2\pi}{5}) = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$$

$\Rightarrow \quad \sin(\frac{\pi}{5}) = \dfrac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

$$\sin(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

On en déduit :

$$\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

On en déduit :

$$\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Produit scalaire

mercredi 27 mai 2020 11:04

Exercice 50 question 1 page 311

Si dans un r.o.n $(O;\vec{i},\vec{j})$: $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'$

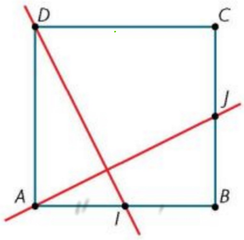
a. $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\2\end{pmatrix}$ dans un r.o.n donc $\vec{u}.\vec{v} = \sqrt{3}\times2\sqrt{3}+(-1)\times2 = 6-2 = 4$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}4\sqrt{3}\\6\end{pmatrix}$ dans un r.o.n donc $\vec{u}.\vec{w} = \sqrt{3}\times4\sqrt{3}+(-1)\times6 = 12-6 = 6$

Exercice 53 page 311

53. *ABCD* est un carré de côté 1 avec le point *I* milieu du segment [*AB*] et le point *J* milieu du segment [*BC*].

Démontrer que les droites (*DI*) et (*AJ*) sont orthogonales de deux façons :



a. en choisissant puis utilisant un repère orthonormé ;

b. sans utiliser de repère.

On travaille dans le repère $(A;\vec{AB},\vec{AD})$

$A(0;0)$ $B(1;0)$ $D(0;1)$

$C(1;1)$ $I\left(\frac{1}{2};0\right)$ $J\left(1;\frac{1}{2}\right)$

$\vec{DI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-0\\0-1\end{pmatrix}$ $\vec{AJ}\begin{pmatrix}1\\1/2\end{pmatrix}$

$\vec{DI}.\vec{AJ} = \frac{1}{2}\times1+(-1)\times\frac{1}{2} = 0$

On peut conclure que $\vec{DI}$ et $\vec{AJ}$ sont orthogonaux donc (DI) et (AJ) orthogonales.

b) $\vec{DI}.\vec{AJ} = (\vec{DA}+\vec{AI}).(\vec{AB}+\vec{BJ})$ grâce à la relation de Chasles.

$= \underbrace{\vec{DA}.\vec{AB}}_{=0} + \vec{DA}.\vec{BJ} + \vec{AI}.\vec{AB} + \underbrace{\vec{AI}.\vec{BJ}}_{=0}$

car $\vec{DA}$ et $\vec{AB}$ orthog   car $\vec{AI}.\vec{BJ}$

$= -DA\times BJ + AI\times AB$

car $\vec{DA}$ et $\vec{BJ}$ sont colinéaires de sens contraire   car $\vec{AI}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires de m sens.

$= -1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times1 = 0$

ABCD est un carré de côté 1

donc $AB = AD = 1$

$I = m[AB]$ donc $AI = \frac{1}{2}$

$J = m[BC]$ donc $BJ = \frac{1}{2}$