Exercice 166 page 219 :

$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx$ et $f(x) = e^{-x^2}$

1) On a montré que pour tout réel x de $[0;1]$ $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1$

d'où $\frac{1}{e} \leq u_0 \leq 1$.

2) $u_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

3) a) Pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n$

b) Variations de (u_n). Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x^2} dx - \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx$$

$$= \int_0^1 x^{n+1} e^{-x^2} - x^n e^{-x^2} dx \quad \text{par linéarité de l'intégrale}$$

$$= \int_0^1 x \times \boxed{x^n e^{-x^2}} - 1 \times \boxed{x^n e^{-x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 \underbrace{x^n e^{-x^2}(x-1)} dx.$$

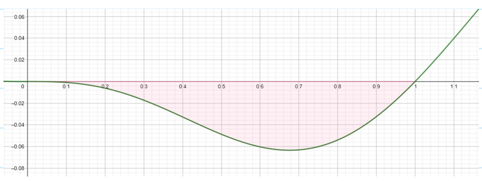
Pour x appartenant à $[0;1]$, $\underline{x - 1 \leq 0}$ et $\underline{x^n \geq 0}$

car : $0 \leq x \leq 1$ $\Big) -1$
$-1 \leq x - 1 \leq 0$

Par propriété, $\underline{e^{-x^2} \geq 0}$

donc pour x dans $[0;1]$, $(x-1)x^n e^{-x^2} \leq 0$

Penser à vérifier l'ordre des bornes : $0 < 1$ donc $\int_0^1 (x-1)x^n e^{-x^2} dx \leq 0$



Pour tout naturel n ; $u_{n+1} - u_n \leq 0$ soit $u_{n+1} \leq u_n$

donc la suite (u_n) est décroiss

c) La suite (u_n) est décroissante (Q 3b) et minorée au tout n naturel

$0 \leq u_n$) donc la suite (u_n) converge vers ℓ et $0 \leq \ell$

c) La suite (u_n) est décroissante (Q 3b) et minorée (pour tout n naturel $0 \leq u_n$) donc la suite (u_n) converge vers ℓ et $0 \leq \ell$

4) Pour tout réel x de $[0,1]$ $f(x) \leq 1$ avec $f(x) = e^{-x^2}$.

donc $x^n e^{-x^2} \leq x^n$ car $x^n \geq 0$.

Comme $\boxed{0 < 1}$, $\int_0^1 x^n e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx$

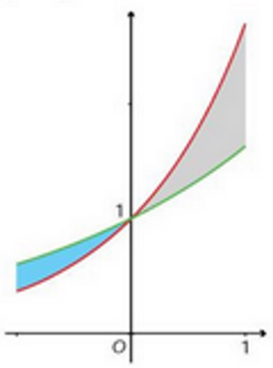
or $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \times 1^{n+1} - \frac{1}{n+1} \times 0^{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

donc pour tout naturel n, $u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

5) Pour tout naturel n, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$

Exercice 119 page 205



$\frac{1}{2} \leq 1$; $\times x \leq 0$

Si $x \leq 0$, $\frac{1}{2}x \geq 1x$

donc $e^{x/2} \geq e^x$

$g(x) \geq f(x)$

$\frac{1}{2} \leq 1$; $\times x \geq 0$

Si $x \geq 0$: $\frac{x}{2} \leq x$

donc $e^{x/2} \leq e^x$

$g(x) \leq f(x)$

CCl : C_f est la courbe rouge.

2) $A_1 =$ "aire bleue" $= \int_{-1}^{0} g(x) - f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} e^{x/2} - e^x\, dx = \left[2e^{x/2} - e^x\right]_{-1}^{0}$

$\int u' e^u = \left[e^u\right]$ si $u(x) = \frac{x}{2}$, $u'(x) = \frac{1}{2}$ donc $e^{x/2} = 2 \times \boxed{\frac{1}{2} \times e^{x/2}}$

$A_1 = \left(2e^0 - e^0\right) - \left(2e^{-1/2} - e^{-1}\right) = 1 - 2e^{-1/2} + e^{-1}$ u.a

$\approx 0,155$ u.a

3) $A_2 =$ "aire grise" $= \int_{0}^{1} f(x) - g(x)\, dx = \int_{0}^{1} e^x - e^{x/2}\, dx = \left[e^x - 2e^{x/2}\right]_{0}^{1}$

$A_2 = \left(e^1 - 2e^{1/2}\right) - \left(e^0 - 2e^0\right) = e - 2e^{1/2} + 1$ u.a.

$\approx 0,421$ u.a

Exercice 152 page 215

Pour tout naturel n, $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$

1) Pour tout naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1)\,dx - \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1) - x^n \ln(x+1)\,dx \qquad \text{(par linéarité)}$$