Page 1 :

vendredi 27 mars 2020 08:41

Rituel : $\int_{-1}^{4} e^{3x+5}\,dx$ $\quad\quad \int u'e^{u} = e^{u}$

On pose : $u(x) = 3x+5$, on calcule $u'(x)=3$

$e^{3x+5} = \frac{1}{3} \times 3 \times e^{3x+5}$ donc $\int_{-1}^{4} e^{3x+5}\,dx = \left[\frac{1}{3}\times e^{3x+5}\right]_{-1}^{4} = \underbrace{\frac{1}{3}\times e^{17}}_{F(b)} - \underbrace{\frac{1}{3} e^{2}}_{F(a)} = \frac{1}{3}\left(e^{17}-e^{2}\right)$

Suite de l'exo 85 p.403 $\quad X \sim \mathcal{B}(36;0,2) \quad E(X) = np = 7,2 \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = 2,4$

b) $P(20 < X \leq 36)$

$$(20 < X \leq 36) \iff (20-7,2 < X-7,2 \leq 36-7,2) \iff (12,8 < X-7,2 \leq 28,8)$$

$$\iff \left(\frac{12,8}{2,4} < \frac{X-7,2}{2,4} \leq \frac{28,8}{2,4}\right) \iff \left(\frac{16}{3} < \frac{X-7,2}{2,4} \leq 12\right)$$

Des événements équivalents ont m̂ proba.

$$P(20 < X \leq 36) = P\left(\frac{16}{3} < \frac{X-7,2}{2,4} \leq 12\right) \simeq \int_{\frac{16}{3}}^{12} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$$ grâce au théorème de Moivre Laplace

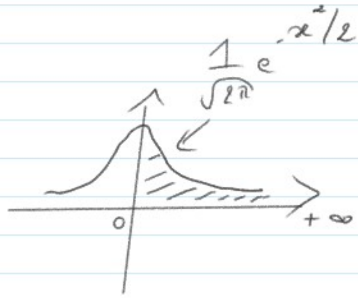
$$\simeq 5\times 10^{-8}$$

c) $P(X \geq 7,2) = ?$

$$(X \geq 7,2) \iff (X-7,2 \geq 0) \iff \left(\frac{X-7,2}{2,4} \geq 0\right)$$

Des événements équivalents ont m̂ proba

$$P(X \geq 7,2) = P\left(\frac{X-7,2}{2,4} \geq 0\right) = 0,5$$



Ex 42 page 396 $\quad I(x) = \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt.$

$I(1) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt \simeq 0,683$; $I(2) \simeq 0,954$; $I(3) \simeq 0,997$; $I(5) \simeq 0,999...$

$I(10) \simeq 1$

2) $\lim_{x \to +\infty} I(x) = 1$ conjecture $\Rightarrow$ Résultat admis

3) On admet que $\boxed{\lim_{x \to +\infty} I(x) = 1}$

* f est continue sur $\mathbb{R}$ car composée de 2 fonctions continues sur $\mathbb{R}$

$$x \longmapsto -\frac{x^2}{2} \xrightarrow{\exp} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

* f est positive sur $\mathbb{R}$ car la fonction exponentielle est strict. positive sur $\mathbb{R}$.

donc f est une fonction de densité.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx \text{ avec } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

X suit une loi normale centrée réduite.

Page 2 : exercice 86 page 403

vendredi 27 mars 2020 10:54

$X \sim \mathcal{B}(64 ; 0,1)$

1) $P(X=k) = \binom{64}{k} \times 0,1^{k} \times 0,9^{64-k}$

2) $E(X) = 64 \times 0,1 = 6,4$, $\sigma(X) = \sqrt{64 \times 0,1 \times 0,9} = 2,4$

3) $P\left(-2 \leq \frac{X-6,4}{2,4} \leq 0,5\right) = p_1$

$\left(-2 \leq \frac{X-6,4}{2,4} \leq 0,5\right) \Leftrightarrow (-2 \times 2,4 \leq X-6,4 \leq 0,5 \times 2,4) \Leftrightarrow (-4,8+6,4 \leq X \leq 1,2+6,4)$

$\Leftrightarrow (1,6 \leq X \leq 7,6)$ des événements équivalents ont m̂ proba.

$p_1 = P\left(-2 \leq \frac{X-6,4}{2,4} \leq 0,5\right) = P(1,6 \leq X \leq 7,6) = P(X \leq 7) - P(X \leq 1)$

car X peut prendre ? valeurs 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7

$p_1 \approx 0,6922 \quad 0,0096 \approx 0,6826$ $\qquad 9,6 \times 10^{-3} = 0,0096$

$\times$ $P(4 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 3) \approx 0,9484 - 0,1063$
$\approx 0,8421$ à 10^{-4} près

$*$ $P(X \geq 6,4) = 1 - P(X < 6,4)$
$= 1 - P(X \leq 6) \approx 1 - 0,5390 \approx 0,4610$ à 10^{-4} près.

4) $n = 64$ donc $n \geq 30$; $np = 6,4$ donc $np \geq 5$; $n(1-p) = n \times 0,9 = 57,6$ donc $n(1-p) \geq 5$.

les conditions du théorème de Moivre Laplace sont vérifiées donc :

a) $\underbrace{P\left(-2 \leq \frac{X-6,4}{2,4} \leq 0,5\right)}_{\text{v.a centrée réduite}} \approx \int_{-2}^{0,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$

$\approx 0,6687$ à 10^{-4} près

b) $P(4 \leq X \leq 10)$

$(4 \leq X \leq 10) \Leftrightarrow (4-6,4 \leq X-6,4 \leq 10-6,4) \Leftrightarrow \left(\frac{-2,4}{2,4} \leq \frac{X-6,4}{2,4} \leq \frac{3,6}{2,4}\right)$

$\Leftrightarrow \left(-1 \leq \frac{X-6,4}{2,4} \leq 1,5\right)$

$P(4 \leq X \leq 10) = P\left(-1 \leq \frac{X-6,4}{2,4} \leq 1,5\right) = \int_{-1}^{1,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \approx 0,7745$

c) $P(X \geq 6,4) = P\left(\frac{X-6,4}{2,4} \geq \frac{6,4-6,4}{2,4}\right) = P\left(\frac{X-6,4}{2,4} \geq 0\right) = 0,5$