Exercice 103 page 406

103. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(60 ; 0{,}4)$ et $F = \frac{X}{60}$.

1. Justifier que les conditions pratiques d'utilisation du théorème de Moivre-Laplace sont réunies.

2. En utilisant cette approximation, montrer que F fluctue à 95 % dans l'intervalle [0,28 ; 0,52]. pb d'arrondi

3. Montrer de la même manière que F fluctue à 99 % dans l'intervalle [0,24 ; 0,56]. arrondi !

$u_{0,05} \approx 1{,}96$

1) $n = 60$ donc $n \geq 30$
$np = 60 \times 0{,}4 = 24$ donc $np \geq 5$
$n(1-p) = 60 \times 0{,}6 = 36$ donc $n(1-p) \geq 5$.

2) On peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique : IF

IF à 95% est : $IF_1 = [0{,}27 ; 0{,}53]$

car $p - 1{,}96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}4 - 1{,}96 \frac{\sqrt{0{,}4 \times 0{,}6}}{\sqrt{60}} \simeq 0{,}276$ → par défaut

$p + 1{,}96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}4 + 1{,}96 \frac{\sqrt{0{,}4 \times 0{,}6}}{\sqrt{60}} \simeq 0{,}523$ → par excès

3) IF à 99% → $u_{0,01} \approx 2{,}58$

$p - 2{,}58 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}4 - 2{,}58 \frac{\sqrt{0{,}4 \times 0{,}6}}{\sqrt{60}} \simeq 0{,}236$

$p + 2{,}58 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}4 + 2{,}58 \frac{\sqrt{0{,}4 \times 0{,}6}}{\sqrt{60}} \simeq 0{,}563$

$IF_2 = [0{,}23 ; 0{,}57]$

Exercice 104 page 406

104. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(43 ; 0{,}6)$ et $F = \frac{X}{43}$.

1. Justifier que les conditions pratiques d'utilisation du théorème de Moivre-Laplace sont réunies.

2. En utilisant cette approximation, montrer que F fluctue à 95 % dans l'intervalle [0,45 ; 0,75].

3. Montrer de la même manière que F fluctue à 99 % dans l'intervalle [0,41 ; 0,79]. ⚠ arrondis

1) $n = 43$ donc $n \geq 30$
$np = 43 \times 0{,}6 = 25{,}8$ donc $np \geq 5$
$n(1-p) = 43 \times 0{,}4 = 17{,}2$ donc $n(1-p) \geq 5$

2) $p - 1{,}96 \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}6 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}6 \times 0{,}4}}{\sqrt{43}} \simeq 0{,}453$

$p + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}6 + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}6 \times 0{,}4}}{\sqrt{43}} \simeq 0{,}746$

$IF_1 = [0{,}45 ; 0{,}75]$

3) $p - 2{,}58 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}6 - 2{,}58 \times \frac{\sqrt{0{,}6 \times 0{,}4}}{\sqrt{43}} \simeq 0{,}407$

$p + 2{,}58 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0{,}6 + 2{,}58 \times \frac{\sqrt{0{,}6 \times 0{,}4}}{\sqrt{43}} \simeq 0{,}793$.

$IF_2 = [0{,}40 , 0{,}80]$

Intervalles de fluctuation

mercredi 17 juin 2020 09:46

Démonstration :

Théorème 1.

Pour $n \geqslant 1$ entier, soit $X_n \sim \mathcal{B}(n;p)$.
Soit $\alpha \in]0;1[$ et u_α l'unique réel tel que $P(Y \in [-u_\alpha; u_\alpha]) = 1-\alpha$ où $Y \sim \mathcal{N}(0;1)$.

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in \left[p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1-\alpha.$$

$X_n \sim \mathcal{B}(n;p)$

Théorème de Moivre Laplace : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(a \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) = \int_a^b \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}}_{\text{f° de densité pour une v.a } Y : \, Y \sim \mathcal{N}(0,1)} dx$

$= P(a \leq Y \leq b)$ avec $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$

on remplace a par $-u_\alpha$ et b par u_α.

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(-u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha\right) = P(-u_\alpha \leq Y \leq u_\alpha)$$

$$\left(-u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha\right) \iff \left(-u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leq X_n - np \leq u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\right)$$

$$\iff \left(np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\right)$$

$$\iff \left(\frac{np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)}}{n} \leq \frac{X_n}{n} \leq \frac{np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)}}{n}\right)$$

$$\iff \left(\frac{\cancel{n}p - u_\alpha \times n \times \frac{\sqrt{n}}{n} \times \sqrt{p(1-p)}}{\cancel{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq \frac{\cancel{n}p + u_\alpha \times \cancel{n} \times \frac{\sqrt{n}}{n} \times \sqrt{p(1-p)}}{\cancel{n}}\right)$$

$$\iff \left(\frac{\cancel{n}\left(p - u_\alpha \times \frac{\sqrt{n}}{n} \times \sqrt{p(1-p)}\right)}{\cancel{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq \frac{\cancel{n}\left(p + u_\alpha \frac{\sqrt{n}}{n} \sqrt{p(1-p)}\right)}{\cancel{n}}\right)$$

or $\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n}}{n} \times \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{n}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\iff \left(p - u_\alpha \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)$$

Des évé. équivalents ont même proba.

$$P\left(-u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha\right) = P\left(p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = P(-u_\alpha \leq Y \leq u_\alpha) \underset{\uparrow}{=} 1-\alpha$$

par déf° de u_α

c.q.f.d

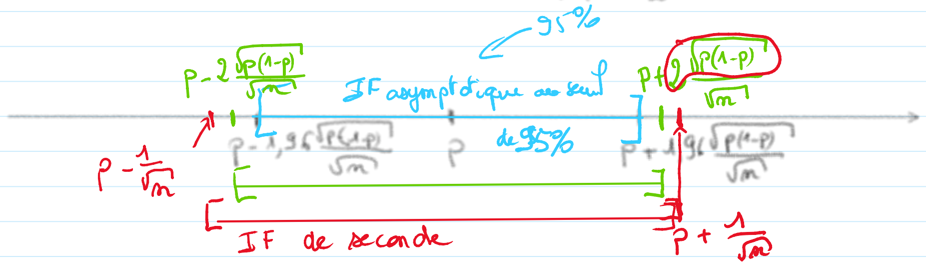
par déf° de u_α

cqfd

Lien avec le cours de seconde :

Soit $f : x \longmapsto x(1-x)$ a pour max $\frac{1}{4}$

$g : x \longmapsto \sqrt{x(1-x)}$ a pour max $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ donc $\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2}$ donc $2\sqrt{p(1-p)} \leq 1$.



Intervalles de fluctuation

Exercice 106 page 406

106. On admet que la proportion p de femmes dans la population française est égale à 51,4 %.

1. À quel intervalle appartient, avec une probabilité de 95 %, la proportion de femmes dans un échantillon de 40 personnes françaises tirées aléatoirement avec remise ?

2. On dénombre dans une classe de terminale 16 filles et 24 garçons. Peut-on conclure qu'il y a une sous-représentation des filles dans cette classe ?

3. Y a-t-il une sous-représentation des filles dans votre classe ?

1) Intervalle de fluctuation ou de confiance ??

La proportion est connue donc intervalle de fluctuation.

$n = 40 \qquad p = 0,514$

$n = 40$ donc $n \geq 30$

$np = 40 \times 0,514 = 20,56$ donc $np \geq 5$

$n(1-p) = 19,44$ donc $n(1-p) \geq 5$

$$p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,514 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,514 \times 0,486}}{\sqrt{40}} \approx 0,359$$

$$p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,514 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,514 \times 0,486}}{\sqrt{40}} \approx 0,669$$

$IF = [0,35 ; 0,67]$ au seuil de 95%.

2) fréquence $= \frac{16}{24+16} = 0,4$.

donc $0,4 \in [0,35 ; 0,67]$ donc ce n'est pas suspect.

On ne peut pas affirmer qu'il y a dans cette classe une sous représentation des filles, au seuil de 95%.

3) ⚠ n est trop faible dans la classe.

Intervalles de confiance

Exemples du cours :

Sondage 1 : 1003 personnes $\rightarrow \underbrace{53,1\%}_{\text{fréquence}}$ votent pour A

Sondage 2 : 9851 personnes $\rightarrow$ 51,2% votent pour A.

on veut estimer la proportion de votants pour A, donc p n'est pas connue

$\Rightarrow$ Intervalle de confiance.

Sondage 1 : $n = 1003 \geq 30$

$nf = 1003 \times \frac{53,1}{100} \approx 532 \geq 5$

$n(1-f) \approx 471 \geq 5.$

$$IC = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,531 - \frac{1}{\sqrt{1003}} ; 0,531 + \frac{1}{\sqrt{1003}} \right]$$

$$IC1 = [0,49 ; 0,57]$$

Sondage 2 : $n = 9851 \geq 30$

$nf = 9851 \times 0,512 \approx 5044 \geq 5$

$n(1-f) \approx 4807 \geq 5$

$$IC = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,512 - \frac{1}{\sqrt{9851}} ; 0,512 + \frac{1}{\sqrt{9851}} \right] =$$

$$= [0,501 ; 0,523]$$