Vecteurs de l'espace.

mercredi 13 mai 2020 09:40

Exemple

Trouver deux points et un vecteur directeur de

$$d : \begin{cases} x = -3 + 0t \\ y = 4 + 2t \\ z = -t \end{cases} . \quad t \in \mathbb{R}$$

$\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ v.d de d ; si t = 0 $x = -3$, $y = 4$, $z = 0$ $A'(-3;4;0) \in d$

si t = 1 $\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 + 2 \times 1 \\ z = -1 \end{cases}$ $A(-3;6;-1) \in d$

Dire si $A(-3;6;-1)$ et $B(-3;-4;3)$ appartiennent à la droite d précédemment définie.

$A(-3;6;-1) \in d$ en prenant t = 1 dans le syst.

$\begin{cases} -3 = -3 \\ -4 = 4 + 2t \\ 3 = -t \end{cases}$ impossible t ne peut pas être égal à -4 et -3 en m tps.

$B(-3;-4;3) \notin d$.

Exemple

Position relative de d et (MN) où $M(3;0;3)$ et $N(0;3;1)$?

$d : \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 + 2t \\ z = -t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ v.d de (MN).

Syst. d'éq° paramétriques de (MN)

$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 0 + 3t \\ z = \underbrace{3}_{\text{coord de } M} - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

mercredi 13 mai 2020 12:09

Ex 88 page 315

$A(1;-3;-2)$ $B(-5;1;3)$.

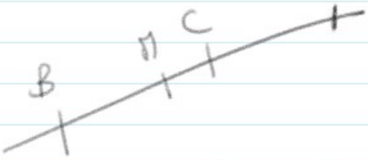
$M(x;y;z) \in (AB)$ ssi $\vec{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \\ z+2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

ssi il existe un réel tq $\vec{AM} = t\vec{AB}$.

ssi " " $\begin{cases} x-1 = -6t \\ y+3 = 4t \\ z+2 = 5t \end{cases}$

Syst. d'éq° paramétriques :

$\begin{cases} x = 1-6t \\ y = -3+4t \\ z = -2+5t \end{cases}$ $\boxed{t \in \mathbb{R}}$



$\vec{BM} = t\,\vec{BC}$ +

b) $B(-5;1;3)$ $C(-1;1;1)$

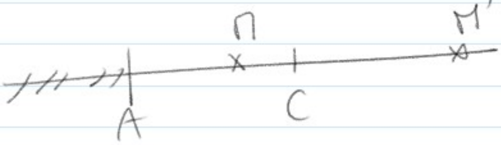
$M(x;y;z) \in [BC]$ ~~ssi~~ il existe un réel t de l'intervalle $[0;1]$ tq $\vec{BM} = t \times \vec{BC}$

$\iff$ il existe t dans $[0;1]$ $\begin{cases} x+5 = 4t \\ y-1 = 0t \\ z-3 = -2t \end{cases}$

Syst. d'équations de $[BC]$.

$\begin{cases} x = -5+4t \\ y = 1 \\ z = 3-2t \end{cases}$ avec $t \in [0;1]$

c) $M(x;y;z) \in [AC) \iff$ il existe un réel t positif tel que $\vec{AM} = t\vec{AC}$.



$\begin{cases} x = 1-2t \\ y = -3+4t \\ z = -2+3t \end{cases}$ t réel positif vendredi 15 mai 2020 10:33

Ex 91 p:316

$(D)\begin{cases} x = -3+2t \\ y = -1+1t \\ z = 2-3t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un v. d. de (D)

$(D')\begin{cases} x = 1+2t' \\ y = 1+t' \\ z = -4-3t' \end{cases}$ $t' \in \mathbb{R}$ donc $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un v. d de (D')

donc $\vec{u} = \vec{v}$, un v. d de (D) est aussi un v. d de (D')

donc (D) et (D') sont parallèles → soit strictement
→ soit confondues.

En remplaçant t par 0 dans le syst. représentant (D), on trouve que $A(-3;-1;2)$ appartient à (D). $\boxed{\text{Quest : } A \in (D') \text{ ??}}$

On résout : *

$\begin{cases} -3 = 1+2t' \\ -1 = 1+t' \\ 2 = -4-3t' \end{cases} \iff \begin{cases} -2 = t' \\ -2 = t' \\ (2+4) \div (-3) = -2 = t' \end{cases}$ une solution pour t' donc $A \in (D')$

(D) et (D') sont parallèles avec un point commun ; elles sont donc confondues. $(* \; -3-1 = 2t' = -4 \quad t' = -4/2 = -2)$

2) $(D)\begin{cases} x = t \\ y = -1-t \\ z = 3+t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ v. d. de (D)

$(D')\begin{cases} x = 1-2t' \\ y = -2+2t' \\ z = 5-2t' \end{cases}$ $t' \in \mathbb{R}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ v. d de (D')

$\times(-2)$ $\times(-2)$ $\times(-2)$

Ici $\vec{v} = -2 \times \vec{u}$ les v. d sont colinéaires donc (D) et (D') sont parallèles strictement ou confondues.

$t = 0$ dans le syst. de (D) : $B(0;-1;3) \in (D)$

$B \in (D')$??

$\begin{cases} 0 = 1-2t' \\ -1 = -2+2t' \\ \ldots \end{cases}$ $0 = 1-2t' \iff -1 = -2t' \iff t' = 0{,}5$

on vérifie dans les 2 autres :

$$\begin{cases} 0 = 1 - 2t' \\ -1 = -2 + 2t' \\ 3 = 5 - 2t' \end{cases}$$

$0 = 1 - 2t' \iff -1 = -2t' \iff t' = 0{,}5$

on vérifie dans les 2 autres :

$-2 + 2 \times 0{,}5 = -1$

$5 - 2 \times 0{,}5 = 4 \neq 3$.

donc les coord de B ne vérifient pas le syst. d'éq° de (D)

donc $B \notin (D')$ donc (D) et (D') ne sont pas confondues

(D) et (D') sont strictement parallèles.

Ex 92 page 316

$$(D) \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \qquad \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ v.d de } (D)$$

$\times 2$ $\times 3$

$$(D') \begin{cases} x = -1 + t' \\ y = -t' \\ z = -1 - t' \end{cases} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ v. d. de } (D')$$

les coord de $\vec{v}$ et $\vec{u}$ ne sont pas proportionnelles donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc (D) et (D') ne sont pas parallèles

donc (D) et (D') sont - soit sécantes
- soit NON coplanaires.

On résout :

$$\begin{cases} x = -3 + 2t = -1 + t' & L_1 \\ y = -1 + t = -t' & L_2 \\ z = 2 - 3t = -1 - t' & L_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 + 2t = -1 + t' & L_1 \\ -1 + t = -t' & L_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 + t = -t' & L_2 \\ -4 + 3t = -1 & L_1 + L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 + t = -t' \\ t = (4 - 1) \div 3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} t' = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

On vérifie dans L_3 :

$2 - 3 \times 1 \overset{?}{=} -1 - 0$ égalité vraie donc $t' = 0$ et $t = 1$.

En remplaçant dans le syst. d'éq° de (D), on trouve les coord du point d'intersection.

$$\begin{cases} x = -3 + 2 \times 1 = -1 \\ y = -1 + 1 = 0 \\ z = 2 - 3 \times 1 = -1 \end{cases}$$

$M(-1\,;0\,;-1)$ appartient à (D) et (D')

D et D' ne peuvent pas être non coplanaires donc elles sont sécantes

2) $(D) \begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ v. d de } (D)$

$\times 1$

$(D') \begin{cases} x = 2 + t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \text{ v. d de } (D')$

$(D') \begin{cases} x = 8 + t' \\ y = -9 + t' \\ z = 11 - t' \end{cases}$ $t' \in \mathbb{R}$ $\quad \times(-1) \quad \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ v.d de (D')

$\vec{u}, \vec{v}$ sont non colinéaires donc (D) et (D') ne sont pas parallèles

On cherche si elles sont sécantes : on résout :

$\begin{cases} x = t = 8 + t' \\ y = -1 - t = -9 + t' \\ z = 3 + t = 11 - t' \end{cases}$ (L_3) $\qquad \begin{cases} t = 8 + t' & L_1 \\ -1 - t = -9 + t' & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 8 + t' \\ -1 = -1 + 2t' \end{cases}$ $L_1 + L_2$

$\begin{cases} t = 8 + t' = 8 \\ t' = 0 \end{cases}$ On vérifie dans L_3 $\quad 3 + 8 = 11 - 0$

Une seule sol° $(t ; t') = (8 ; 0)$ donc un seul point commun

$N(8 ; -9 ; 11)$ donc (D) et (D') sont sécantes en $N(8 ; -9 ; 11)$