Loi normale

Exercice 82 page 402

82. Un laboratoire pharmaceutique souhaite produire un nouveau médicament. Il faut pour cela ajuster le dosage de la substance active dans chaque comprimé. Plusieurs techniques industrielles sont envisageables : toutes fournissent un dosage aléatoire X, plus ou moins précis, suivant une loi $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$, où $\mu \geqslant 0$ et $\sigma > 0$. À chaque technique industrielle est associée un unique σ reflétant la précision du dosage induit. De plus, quelle que soit la technique choisie, le dosage moyen peut être réglé au travers du paramètre μ.

Si la teneur en substance active est trop importante, le médicament peut devenir dangereux. Le laboratoire considère ainsi que X doit être inférieur à 60 microgrammes avec une probabilité supérieure ou égale à 0,999. Inversement, si X est trop faible, le médicament n'est plus efficace ; le laboratoire souhaite donc que X soit supérieur à 40 microgrammes avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

1. Justifier que les deux exigences du laboratoire se traduisent par le système :

$$\begin{cases} P(X \leqslant 40) \leqslant 0{,}05 \\ P(X \leqslant 60) \geqslant 0{,}999 \end{cases}.$$

2. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$. Écrire le système précédent en fonction de Z.

3. En déduire que μ et σ doivent vérifier :

$$\begin{cases} \dfrac{40-\mu}{\sigma} \leqslant -1{,}64 \\ \dfrac{60-\mu}{\sigma} \geqslant 3{,}09 \end{cases}.$$

4. Supposons que l'on choisisse une technique de dosage industrielle particulière. Cela revient à fixer $\sigma > 0$. À quel intervalle, dépendant de σ, doit alors appartenir μ ?

5. En déduire la valeur maximale possible pour le choix de σ. On la notera σ_{max}.

6. Plus la technique industrielle est précise dans son dosage, plus elle est chère à mettre en œuvre. Le laboratoire désirant minimiser son coût de production, il a intérêt à choisir une technique industrielle associé au σ le plus grand possible, tout en permettant de respecter les exigences de dosage. Le laboratoire choisit donc la technique industrielle associée à σ_{max}. Quelle valeur du dosage moyen μ devra-t-il enfin choisir pour respecter ses exigences ?

$X \sim \mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$

1°) énoncé * $P(X > 40) \geq 0{,}95$ et * $P(X \leq 60) \leq 0{,}999$

$P(X \leq 40) = 1 - P(X>40) \leq 1 - 0{,}95$ donc $P(X \leq 40) \leq 0{,}05$.

$$\begin{cases} P(X \leq 40) \leq 0{,}05 \\ P(X \leq 60) \geq 0{,}999 \end{cases}$$

2°) $Z \sim \mathcal{N}(0\,;1)$

$(X \leq 40) \Leftrightarrow \left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{40-\mu}{\sigma}\right)$; $(X \leq 60) \Leftrightarrow \left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{60-\mu}{\sigma}\right)$

Des événements équivalents ont m̂ proba

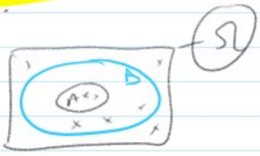
le syst. devient $\begin{cases} P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{40-\mu}{\sigma}\right) \leq 0{,}05 \\ P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{60-\mu}{\sigma}\right) \geq 0{,}999 \end{cases}$

3°) * $P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{40-\mu}{\sigma}\right) \leq P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq -1{,}64\right)$ cf calculatrice.

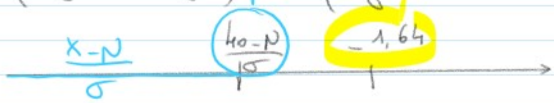
A, B deux évé. définis sur le m̂ univers.

$A \subset B$

$P(A) \leq P(B)$



* $\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{40-\mu}{\sigma}\right) \subset \left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq -1{,}64\right)$

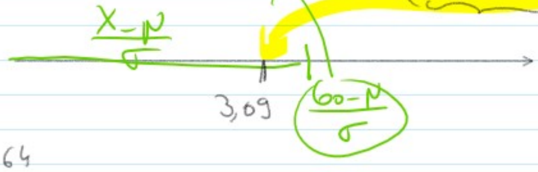


donc $\boxed{\dfrac{40-\mu}{\sigma} \leq -1{,}64}$

$P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{60-\mu}{\sigma}\right) \geq 0{,}999$

$P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{60-\mu}{\sigma}\right) \geq P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq 3{,}09\right)$

$\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{60-\mu}{\sigma}\right) \supset \left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq 3{,}09\right)$



donc $\boxed{3{,}09 \leq \dfrac{60-\mu}{\sigma}}$

d'où le système : $\begin{cases} \dfrac{40-\mu}{\sigma} \leq -1{,}64 \\ \dfrac{60-\mu}{\sigma} \geq 3{,}09 \end{cases}$

$\dfrac{40-\mu}{\sigma} \leq -1{,}64 \underset{\sigma>0}{\Leftrightarrow} 40 - \mu \leq -1{,}64\,\sigma \Leftrightarrow -\mu \leq -1{,}64\,\sigma - 40 \underset{\times(-1)<0}{\Leftrightarrow} \mu \geq 1{,}64\sigma + 40$

$\dfrac{60-\mu}{\sigma} \geq 3{,}09 \Leftrightarrow 60 - \mu \geq 3{,}09\,\sigma \Leftrightarrow 60 - 3{,}09\,\sigma \geq \mu$

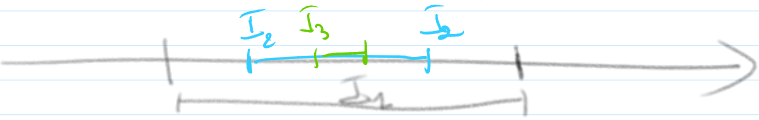
$1{,}64\sigma + 40 \leq \mu \leq 60 - 3{,}09\,\sigma$

$\mu \in [1{,}64\sigma + 40\,;60 - 3{,}09\,\sigma]$

$N \in [\underbrace{1,64\sigma + 40}_{\downarrow} \,;\, 60 - 3,09\sigma]$

plus σ est grand, plus $1,64\sigma + 40$ est grand et plus $60 - 3,09\sigma$ est petit.

$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$



Il faut : $1,64\sigma + 40 \leq 60 - 3,09\sigma$

$\Leftrightarrow 1,64\sigma + 3,09\sigma \leq 60 - 40$.

$\Leftrightarrow 4,73\sigma \leq 20$

$\Leftrightarrow \sigma \leq \frac{20}{4,73}$

$\frac{20}{4,73} \simeq 4,22$ donc $\sigma_{max} \simeq 4,22$

6°) $1,64\,\sigma_{max} + 40 \approx 46,9208$

$60 - 3,09\,\sigma_{max} \approx 46,9602$

par ex : $N \simeq 46,94$