Vecteurs de l'espace.

mercredi 13 mai 2020 09:17

Exercice 45 page 310

$A(2;4;-1)$; $B(3;1;2)$; $C(1;0;1)$; $D(3;2;1)$ et $E(1;2;0)$

1) les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ ne sont pas coplanaires

2) et donc $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ peut être un repère de l'espace.

3) $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. $M(x_M,y_M;z_M)$

$2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} = 2\times\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}2\times1-(-1)\\2\times(-3)-(-4)\\2\times3-2\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}$ a pour coord $\begin{pmatrix}x_M-2\\y_M-4\\z_M+1\end{pmatrix}$. Or deux vecteurs sont égaux ssi ils ont m coordonnées.

$\begin{cases}x_M-2=3\\y_M-4=-2\\z_M+1=4\end{cases}$ donc $x_M=5$, $y_M=2$, $z_M=3$ $\boxed{M(5;2;3)}$

4) α,β,γ tels que $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}+\gamma\overrightarrow{AD}$.

$\iff\begin{cases}-1=\alpha\times1+\beta\times(-1)+\gamma\times1\\-2=\alpha\times(-3)+\beta\times(-4)+\gamma\times(-2)\\1=\alpha\times3+\beta\times2+\gamma\times2\end{cases}$

$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AD}$

$L_1: \alpha \quad \times3$
$L_2: -3\alpha \quad +$
0α

$-3\beta-4\beta$
$3\gamma-2\gamma$
$L_1: \alpha \quad \times-3$
$L_3: 3\alpha \quad +$
0α

$\iff\begin{cases}-1=1\alpha-\beta+\gamma\\-3-2=-7\beta+\gamma\\4=5\beta-\gamma\end{cases}$

$3L_1+L_2$

$-3L_1+L_3$

γ
$-\gamma$

$-7\beta\times5$
$5\beta\times7$

$\iff\begin{cases}-1=\alpha-\beta+\gamma\\-5=-7\beta+\gamma\\-1=-2\beta\end{cases}$ L_2+L_3

$\iff\begin{cases}-1=\alpha-\frac{1}{2}+\gamma\\-5=-7\times\frac{1}{2}+\gamma\\\frac{1}{2}=\beta\end{cases}$

$\iff\begin{cases}-1=\alpha-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\\-5+\frac{7}{2}=\gamma=-\frac{3}{2}\\\beta=\frac{1}{2}\end{cases}\iff\begin{cases}-1+2=\alpha=1\\\gamma=-\frac{3}{2}\\\beta=\frac{1}{2}\end{cases}$

donc $\overrightarrow{AE}=1\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

E a pour coordonnées $\left(1;\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$ dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$

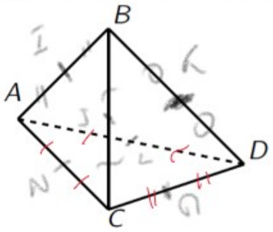
Vecteurs de l'espace.

mercredi 13 mai 2020 09:18

Exercices du cours

Exemple

Montrer que les segments qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre sont concourants en leur milieu.



ABCD est un vrai tétraèdre donc $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ sont non coplanaires

On peut considérer le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$. Dans ce repère,

$A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ $C(0;1;0)$ $D(0;0;1)$

$(\vec{AB} = 1\vec{AB} + 0\vec{AC} + 0\vec{AD})$

I milieu de [AB] donc I a pour coord $\left(\frac{1}{2};0;0\right)$
M milieu de [CD] donc M " $\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$
donc les coord. du mil de [IM] sont : $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$

N milieu de [AC] donc N a pour coord $\left(0;\frac{1}{2};0\right)$
K milieu de [BD] donc K a pour coord $\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$
donc les coord. du milieu de [NK] sont $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$

L milieu de [AD] donc L a pour coord $\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$
J milieu de [BC] donc J a pour coord $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$
donc les coord du milieu de [LJ] sont $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$

les segments joignant les milieux des segments opposés sont concourants

Vecteurs de l'espace.

mercredi 13 mai 2020 09:24

Exemple

Soient $A(2;3;1)$, $B(5;-2;3)$ et $C(-4;13;z)$ trois points du plan ou de l'espace. Trouver la valeur de z telle que A, B et C soient alignés

A, B, C sont alignés équivaut à $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}-6\\10\\z-1\end{pmatrix}$ sont colinéaires

équivaut à il existe un réel k tel que $\vec{AB} = k\vec{AC}$.

$$\begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{pmatrix}-6\\10\\z-1\end{pmatrix}$$

donc $2\times(-2) = z-1$

$-3 = z$

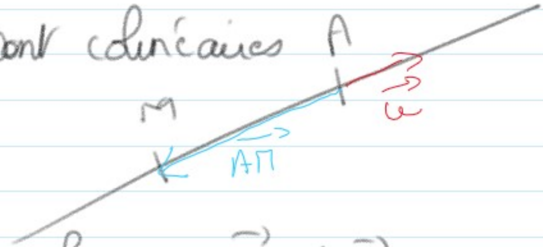
Vecteurs de l'espace.

mercredi 13 mai 2020 11:24

Ex 85 page 315

$A(0;2;-1)$ $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ d_1 : droite passant par A, de v. d $\vec{u}$.

$M(x;y;z) \in d_1 \iff \vec{AM}\begin{pmatrix}x\\y-2\\z+1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ sont colinéaires

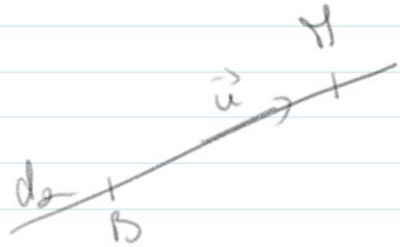


$\iff$ il existe un réel t tel que $\vec{AM} = t\vec{u}$

$\iff$ " " t tel que $\begin{cases} x = 2t \\ y-2 = -1t \\ z+1 = 3t \end{cases}$

Syst. d'éq. paramétriques de (d_1) :

$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2-t \\ z = -1+3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$



2) $d_2 \parallel d_1$ et $B \in d_2$.

$B(1;0;-1)$

$\vec{u}$ dirige d_1 et comme d_1 et d_2 sont parallèles, $\vec{u}$ est v.d de d_2.

$M(x;y;z) \in d \iff \vec{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z+1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\iff$ il existe un réel t tq $\vec{BM} = t\vec{u}$.

$\iff$ " " t tq $\begin{cases} x-1 = t\times 2 \\ y = t\times(-1) \\ z+1 = t\times 3. \end{cases}$

Syst d'éq paramétriques :

$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = -1+3t \end{cases}$ t réel

Est ce que le point $C(-1;-1;-4)$ appartient il à d_2 ?

Est ce que le point $C(-1;-1;-4)$ appartient il à d_2 ?

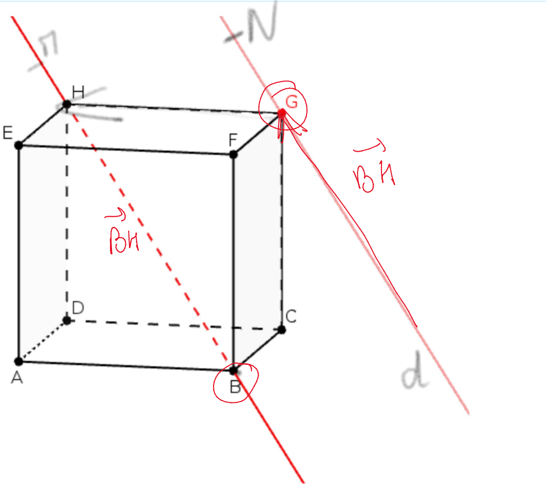
$$\begin{cases} -1 \overset{?}{=} 1+2t \\ -1 \overset{?}{=} -t \\ -4 \overset{?}{=} -1+3t \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{-2}{2} = -1 = t \\ 1 = t \\ \times \end{cases}$$

impossible de trouver t

donc $C \notin d_2$

Exemple

Dans le cube ABCDEFHH, on considère le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$. Déterminer un système d'équations paramétrique de (BH), puis de la parallèle d à (BH) passant par G.



B $(1 ; 0 ; 0)$

$\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE}$

H $(0 ; 1 ; 1)$

$\overrightarrow{AH} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$

$M(x;y;z)$ appartient à (BH)

équivaut à $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires

équivaut à il existe un réel t tq : $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BH}$

" il existe un réel t $\begin{cases} x-1 = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

Syst. d'éq paramétriques de (BH) $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$