Vecteurs

Activité Math'x Terminale S

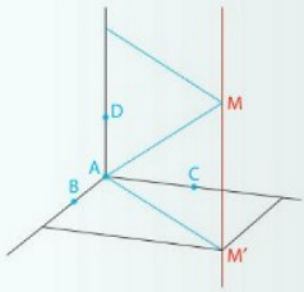
B. Généralisation

Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires et M un point de l'espace.

1. a. Expliquer pourquoi la parallèle à (AD) passant par M coupe le plan (ABC) en un point M′.

b. Justifier qu'il existe :
– un réel z tel que $\overrightarrow{M'M} = z\overrightarrow{AD}$.
– deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM'} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

c. En déduire que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$.



2. Supposons qu'il existe deux triplets $(x\,;y;z)$ et $(x';y';z')$ tels que :
$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AM} = x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{AC} + z'\overrightarrow{AD}$.

a. Démontrer que :
$$(x - x')\overrightarrow{AB} = (y' - y)\overrightarrow{AC} + (z' - z)\overrightarrow{AD}.$$

b. Montrer par l'absurde que $x = x'$. En déduire que $y = y'$ et $z = z'$. Que peut-on en déduire ?

On a montré qu'il existe 3 réels x, y, z tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AB}$

2 a) démonstration de l'unicité : On suppose qu'il existe 2 triplets $(x\,;y\,;z)$ et $(x'\,;y'\,;z')$ tels que

$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AM} = x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{AC} + z'\overrightarrow{AD}$

donc

$x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD} = x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{AC} + z'\overrightarrow{AD}$

$\iff x\overrightarrow{AB} - x'\overrightarrow{AB} = y'\overrightarrow{AC} + z'\overrightarrow{AD} - y\overrightarrow{AC} - z\overrightarrow{AD}$

$\iff (x - x')\overrightarrow{AB} = (y' - y)\overrightarrow{AC} + (z' - z)\overrightarrow{AD}$ (*)

b) Si $x \neq x'$ alors $x - x' \neq 0$ donc $\overrightarrow{AB} = \frac{y'-y}{x-x'}\overrightarrow{AC} + \frac{z'-z}{x-x'}\overrightarrow{AD}$. (*)

$\overrightarrow{AB}$ serait une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$

les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ seraient coplanaires

et donc A, B, C, D seraient coplanaires : contradiction.

donc $x = x'$

(*) devient $0\overrightarrow{AB} = \vec{0} = (y'-y)\overrightarrow{AC} + (z'-z)\overrightarrow{AD}$.

$(y-y')\overrightarrow{AC} = (z'-z)\overrightarrow{AD}$.

si $y \neq y'$ alors $\overrightarrow{AC} = \frac{z'-z}{y-y'}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ seraient colinéaires

impossible car A, B, C, D ne sont pas coplanaires

donc A, C, D ne peuvent pas être alignés.

donc $y = y'$

(*) devient $0\overrightarrow{AB} = 0\overrightarrow{AC} + (z'-z)\overrightarrow{AD}$ soit $\vec{0} = (z'-z)\overrightarrow{AD}$

ce qui n'est possible que si $z' - z = 0$ (car $\overrightarrow{AD} \neq \vec{0}$)

donc $z = z'$

d'où l'unicité des coordonnées.

Vecteurs

mardi 12 mai 2020 09:43

Exercice. 45 page 310 $A(2;4;-1)$ $B(3;1;2)$ $C(1,0,1)$ $D(3;2;1)$.

1) Montrer que les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ ne sont pas coplanaires.

$\vec{AB}\begin{pmatrix}3-2\\1-4\\2-(-1)\end{pmatrix}$ soit $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}$; $\vec{AC}\begin{pmatrix}1-2\\0-4\\1-(-1)\end{pmatrix}$ soit $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\end{pmatrix}$; $\vec{AD}\begin{pmatrix}3-2\\2-4\\1-(-1)\end{pmatrix}$ soit $\vec{AD}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

coord B coord A

$\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\times(-1)}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\end{pmatrix}$, $\times\frac{2}{3}$

$(-1) \neq \frac{2}{3}$ donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ont des coord. NON proportionnelles

donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont NON colinéaires

$\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ sont coplanaires ssi il existe 2 réels t et t' tels que

$$\vec{AD} = t\vec{AB} + t'\vec{AC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1t + (-t') \\ -2 = -3t + (-4t') \\ 2 = +3t + 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = t - t' \\ -2 = -3t - 4t' \\ -2 + 2 = -4t' + 2t' \end{cases} \quad L_2 + L_3$$

$L2 + L3$:
$$\begin{aligned} -2 &= -3t - 4t' \\ + \quad 2 &= +3t + 2t' \\ \hline -2+2 &= 0t - 2t' \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = t - t' \\ -2 = -3t - 4t' \\ 0 = -2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = t \\ -2 = -3t + 0 \\ t' = 0 \end{cases} \quad \text{IMPOSSIBLE}$$

Ceci prouve que les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ sont NON coplanaires

2) Des vecteurs non coplanaires forment une base de l'espace

donc $(A; \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ forment un repère.