Loi normale

Exercice 57 page 397.

57. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(32\,;\,49)$.

1. Que valent l'espérance, la variance et l'écart-type de X ?
2. Calculer (avec une calculatrice) $P(30 \leqslant X \leqslant 40)$.
3. Calculer (avec une calculatrice) $P(X < 30)$.
4. Déduire de 2. et 3. $P(X > 40)$.
5. Vérifier ce résultat à la calculatrice.

1) $E(X) = 32$; $V(X) = 49$; $\sigma(X) = \sigma = \sqrt{49} = 7$

2) $P(30 \leq X \leq 40) \approx 0{,}4859$ à 10^{-4} près

3) $P(X < 30) \simeq 0{,}3875$ à 10^{-4} près

lower : -10^{99}

upper : 30

4) $P(X<30) + P(30 \leq X \leq 40) + P(X>40) = 1$ donc $P(X>40) \simeq 1 - 0{,}4859 - 0{,}3875 \simeq 0{,}1266$

5) lower : 40 et upper : 10^{99}

Exercice 60 page 398.

60. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$ et X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(7\,;2)$.

1. Exprimer les probabilités suivantes en fonction de Z : $P(6 < X < 8)$; $P(X < 7)$; $P((X < 5) \cup (X > 9))$.
2. Calculer ces probabilités à l'aide d'une calculatrice de deux manières différentes :
   a. en utilisant la loi de X ; $\to \mu = 7 \quad \sigma = \sqrt{2}$
   b. en utilisant la loi de Z. $\to \mu = 0 \quad \sigma = 1$

1) $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$ $\quad X \sim \mathcal{N}(7;2)$. $\quad E(X) = \mu = 7$ et $\sigma = \sqrt{2}$

$6 < X < 8 \iff -\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{X-7}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0;1)$

des évé équivalents ont m̂ proba* $P(6<X<8) = P\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} < Z < \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$(X<7) \iff (X-7<0) \iff \left(\frac{X-7}{\sqrt{2}} < 0\right)$

*$P(X<7) = P(Z<0)$

$((X<5) \cup (X>9)) \iff \left(\left(\frac{X-7}{\sqrt{2}} < \frac{-2}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{X-7}{\sqrt{2}} > \frac{9-7}{\sqrt{2}}\right)\right) \iff \left((Z < -\sqrt{2}) \cup (Z > +\sqrt{2})\right)$

$\frac{-2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

*$P((X<5) \cup (X>9)) = P((Z<-\sqrt{2}) \cup (Z>\sqrt{2}))$

2) $P(6<X<8) \approx 0{,}5205$

$P\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} < Z < \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$P(X<7) = 0{,}5$

$P(Z<0) = 0{,}5$

$P((X<5) \cup (X>9)) = P(X<5) + P(X>9) - 0$

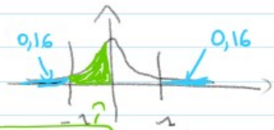
évé disjoints

$\approx 0{,}0786 + 0{,}0786 \simeq 0{,}1572$ à 10^{-4} près.

Questionnaire wooclap

Q2) $(X \geq 0) \iff (X+5 \geq 5) \iff \left(\frac{X+5}{5} \geq 1\right) \iff (Z \geq 1)$ $\quad P(Z \geq 1) = 1 - P(Z<1) = 0{,}16$

Q3) $X \sim \mathcal{N}(5\,;25)$ $\quad (X<0) \iff \left(\frac{X-5}{5} < -1\right)$ dc $P(X<0) = P(Z<-1)$



Q4) $X \sim \mathcal{N}(5\,;16)$ $\quad (1<X<5) \iff \left(\frac{1-5}{4} < \frac{X-5}{4} < \frac{5-5}{4}\right) \iff (-1 < Z < 0)$

$\boxed{P(-1<Z<0)} = 0{,}5 - 0{,}16 = 0{,}34$

Exercice 64 page 398 en respectant la logique de l'exercice, puis les fonctionnalités de la calculatrice.

64. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(3\,;4)$ ← variance σ^2
et Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $P(X \leqslant x) = P\left(Z \leqslant \frac{x-3}{2}\right)$.
2. En déduire le réel x tel que $P(X \leqslant x) = 0{,}95$.

1) $(X \leq x) \iff (X-3 \leq x-3)$

$\iff \left(\frac{X-3}{2} \leq \frac{x-3}{2}\right) \iff \left(Z \leq \frac{x-3}{2}\right)$

Des évé équivalents ont m̂ proba.

$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-3}{2}\right)$.

2) $P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-3}{2}\right) = 0{,}95$.

avec la calculatrice $\simeq 1{,}64$ $\qquad Z \sim \mathcal{N}(0;1) \to \mu = 0,\ \sigma = 1$

$\frac{x-3}{2} = 1{,}64$ donc $x - 3 = 2 \times 1{,}64$ dc $x = 3 + 3{,}28 = 6{,}28$

vérificat° : $P(X \leq x) = 0{,}95$ $\qquad X \sim \mathcal{N}(3\,;4)$ $\qquad \mu = 3$, $\sigma = 2$

$x \simeq 6{,}28$

Loi normale

mercredi 10 juin 2020 16:00

Exercice 74 page 400

74. Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0\,;\sigma^2)$ et Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

1. Montrer que pour tout $\sigma > 0$,
$$P(-10 < X < 10) = P\left(\frac{-10}{\sigma} < Z < \frac{10}{\sigma}\right).$$
2. Donner le réel $x > 0$ tel que :
$$P(-x < Z < x) = 0{,}95.$$
3. En déduire la valeur de σ, $\sigma > 0$ telle que :
$$P(-10 < X < 10) = 0{,}95.$$

$X \sim \mathcal{N}(0\,;\sigma^2)$ et $Z \sim \mathcal{N}(0\,;1)$

1) $-10 < X < 10 \iff \left(-\frac{10}{\sigma} < \frac{X}{\sigma} < \frac{10}{\sigma}\right)$

si $X \sim \mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ alors $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0\,;1)$

d'où l'égalité

2) $P(-x < Z < x) = 0{,}95$: $x = 1{,}96$.

(cf cours sur $\mathcal{N}(0\,;1)$ avec $u_{0,05} = 1{,}96$)

3) $-x < Z < x \iff -x < \frac{X}{\sigma} < x \iff \boxed{-x\sigma < X < x\sigma}$

$\boxed{P(-10 < X < 10)} = \underline{0{,}95} = P(-x < Z < x) = P(-1{,}96 < Z < 1{,}96)$

$x\sigma = 10 \iff \sigma = \frac{10}{x} = \frac{10}{1{,}96} \approx 5{,}10$

Exercice : La durée de vie d'une ampoule, mesurée en heures, est une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$.
On a pu déterminer expérimentalement les probabilités :
$P(D > 2000) = 0{,}925\,1$ et $P(D < 3\,000) = 0{,}142\,3$.

1. Quelle est la loi suivie par $\frac{D-\mu}{\sigma}$?
2. Déterminer un système vérifié par μ et σ.
3. En déduire μ et σ.
4. Déterminer $P(D < 1\,000)$ et $P(D > 5\,000)$.

1) $D \sim \mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2) \iff \frac{D-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0\,;1)$

2) $(D > 2000) \iff \left(\frac{D-\mu}{\sigma} > \frac{2000-\mu}{\sigma}\right)$

$P(D > 2000) = 0{,}9251$.

$P\left(\frac{D-\mu}{\sigma} > \frac{2000-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9251$

$Z \sim \mathcal{N}(0\,;1)$

DIST NORM InvNorm. $\mu = 0$ $\sigma = 1$

$\Rightarrow -1{,}44$

$\frac{2000-\mu}{\sigma} = -1{,}44$.

$P(D < 3000) = 0{,}1423 = P\left(\frac{D-\mu}{\sigma} < \frac{3000-\mu}{\sigma}\right)$

$\frac{3000-\mu}{\sigma} \approx -1{,}07$.

$$\begin{cases} \frac{2000-\mu}{\sigma} = -1{,}44 \\ \frac{3000-\mu}{\sigma} = -1{,}07 \end{cases} \iff \begin{cases} 2000-\mu = -1{,}44\,\sigma & L_1 \\ 3000-\mu = -1{,}07\,\sigma & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 1000 - 0 = -1{,}07\sigma + 1{,}44\sigma = 0{,}37\,\sigma & L_2 - L_1 \\ 3000-\mu = -1{,}07\,\sigma \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sigma = \frac{1000}{0{,}37} \approx 2702{,}7 \\ \mu = 5891{,}9 \end{cases}$$

$D \sim \mathcal{N}(5892\,;2702{,}7^2)$