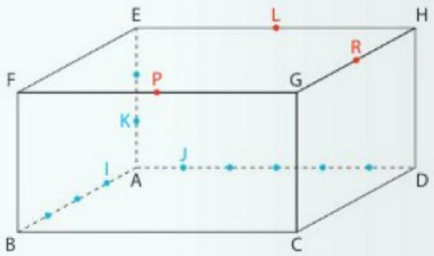
Activité Math'x Terminale S

Activité 3 : Repérer un point dans l'espace

A. Dans un parallélépipède rectangle

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que AB = 4 cm, AD = 6 cm et AE = 3 cm. Soit I le point de [AB], J le point de [AD] et K le point de [AE] tels que AI = AJ = AK = 1 cm.



1. a. Quelle est la nature de ABCD ?

b. En déduire l'expression du vecteur $\overrightarrow{AC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$.

2. Que peut-on dire de $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{AE}$? En déduire $\overrightarrow{CG}$ en fonction de $\overrightarrow{AK}$.

3. Déduire de ce qui précède l'expression de $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$.

4. Soit P le milieu de [FG], R le milieu de [GH] et L le milieu de [EH]. Exprimer $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$. Faire de même pour $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AL}$.

1) ABCD est un rectangle.
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
règle du parallélogramme
ABCD est un parallélogramme particulier
$\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AI} + 6\overrightarrow{AJ}$
$\Leftrightarrow$ C(4 ; 6) dans le repère $(A ; \overrightarrow{AI} ; \overrightarrow{AJ})$

2) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$
donc $\overrightarrow{CG} = 3\overrightarrow{AK}$.

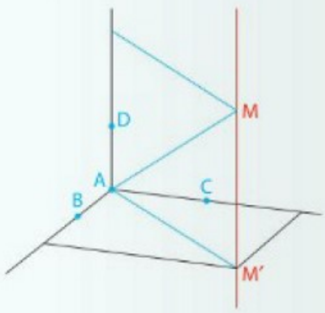
3) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}$
relation de Chasles
$= 4\overrightarrow{AI} + 6\overrightarrow{AJ} + 3\overrightarrow{AK}$
G a pour coord (4 ; 6 ; 3) dans le repère $(A ; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$

4) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FP}$
$= 4\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{AJ}$.
$= 4\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AJ} + 3\overrightarrow{AK}$.
P(4 ; 3 ; 3)
abscisse ordonnée côte

$\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{AI} + 6\overrightarrow{AJ} + 3\overrightarrow{AK}$
R(2 ; 6 ; 3)
$\overrightarrow{AL} = 0\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AJ} + 3\overrightarrow{AK}$
L(0 ; 3 ; 3)

B. Généralisation

Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires et M un point de l'espace.



1. a. Expliquer pourquoi la parallèle à (AD) passant par M coupe le plan (ABC) en un point M′.

b. Justifier qu'il existe :
- un réel z tel que $\overrightarrow{M'M} = z\overrightarrow{AD}$.
- deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM'} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

c. En déduire que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$.

2. Supposons qu'il existe deux triplets $(x\,;y;z)$ et $(x';y';z')$ tels que :
$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AM} = x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{AC} + z'\overrightarrow{AD}$.

a. Démontrer que :
$$(x - x')\overrightarrow{AB} = (y' - y)\overrightarrow{AC} + (z' - z)\overrightarrow{AD}.$$

b. Montrer par l'absurde que $x = x'$. En déduire que $y = y'$ et $z = z'$. Que peut-on en déduire ?

1) a) Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.
b) * $\overrightarrow{M'M} = z\overrightarrow{AD}$ car $\overrightarrow{M'M}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires puisque les droites (M′M) et (AD) sont parallèles
* (ABC) forment un plan, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires
donc $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ forment un repère du plan (ABC)

M′ ∈ (ABC) et donc admet 2 coord (x ; y) dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AM'} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'M}$ (relation de Chasles)

$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$.