Produit scalaire

Exercice 107 page 318, 319

107. L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(-2 ; 0 ; 1)$, $B(1 ; 2 ; -1)$ et $C(-2 ; 2 ; 2)$.

1. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis les longueurs AB et AC.

b. En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

c. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :
$$2x - y + 2z + 2 = 0.$$

3. Soit (P_1) et (P_2) les plans d'équations respectives :
$$x + y - 3z + 3 = 0 \text{ et } x - 2y + 6z = 0.$$
Montrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants selon une droite (D) dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

4. Démontrer que la droite (D) et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

5. Soit S la sphère de centre $\Omega(1 ; -3 ; 1)$ et de rayon $r = 3$.

a. Donner une équation cartésienne de la sphère S.

b. Étudier l'intersection de la sphère S et de la droite (D).

c. Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère S.

1) a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2$

b) $\widehat{BAC} \approx 77°$

c) A, B, C non alignés

2) (ABC) : $2x - y + 2z + 2 = 0$

3) (D) : $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

$(D) = P_1 \cap P_2$.

4) $\{H\} = (D) \cap (ABC)$

$H(-2 ; -4 ; -1)$

5)

$S = \{M \mid \Omega M = r\}$
$= \{M \mid \Omega M^2 = r^2\}$

$M(x ; y ; z)$ $\quad \vec{\Omega M}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \\ z-1 \end{pmatrix}$

$\Omega M^2 = \vec{\Omega M}^2 = \vec{\Omega M} \cdot \vec{\Omega M}$

$\Omega M^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2$

Equation de la sphère. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 3^2$ (car $r = 3$)

b) $M(x, y, z) \in S \cap (D) \iff \begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9 \\ x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$\iff \begin{cases} (-2-1)^2 + (-1+3t+3)^2 + (t-1)^2 = 9 \\ x = -2 \\ y = -1+3t \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} 9 + (3t+2)^2 + (t-1)^2 = 9 \\ x = -2 \\ y = -1+3t \\ z = t \end{cases}$ (Syst)

$9 + (3t+2)^2 + (t-1)^2 = 9 \iff 9 + 9t^2 + 12t + 4 + t^2 - 2t + 1 = 9$

$\iff 10t^2 + 10t + 5 = 0$ éq. du 2nd degré à coef. réels.

$\Delta = -100 < 0$ donc pas de sol. réelle.

Le système n'a pas de solution donc (D) ne coupe pas la sphère.

c)

(S) est tangente au plan (ABC) signifie que la distance de Ω au plan (ABC) vaut $r = 3$.

Sol

$N(x\,;y\,;z)$ proj orthogonal sur (ABC) $\big((ABC) : 2x - y + 2z + 2 = 0\big)$

$\overrightarrow{\Omega N}\begin{pmatrix}x-1\\y+3\\z-1\end{pmatrix}$ normal au plan (ABC) donc ses coord sont proportionnelles à $\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

il existe k réel tq $\begin{cases}x-1=2k\\y+3=-k\\z-1=2k\end{cases}$ $\overrightarrow{\Omega N}$

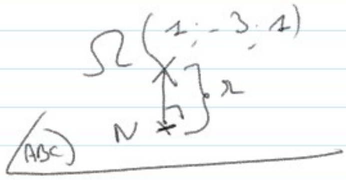
N = proj. orthogonal de Ω sur (ABC) donc N appartient à (ABC)

donc $2\times(2k+1) - (-k-3) + 2(2k+1) + 2 = 0$.

$4k + 2 + k + 3 + 4k + 2 + 2 = 0$

$9k + 9 = 0 \iff 9k = -9$

$k = -1$



$N(2k+1\,; -k-3\,; 2k+1)$ avec $k=-1$ donc $N(-1\,; -2\,; -1)$

$\Omega N^2 = (-2)^2 + 1^2 + (-2)^2 = 9$ donc $\Omega N = 3$ (ΩN distance)

La distance de Ω au plan (ABC) est égale au rayon de la sphère donc la sphère est tangente au plan (ABC) au point $N(-1\,;-2\,;-1)$.

Loi normale

mercredi 10 juin 2020 09:39

Exercice 124 page 411

124. Une entreprise fabrique des vêtements de sport pouvant présenter deux défauts indépendants :

- la probabilité que le tissu présente un défaut est 0,02.
- la probabilité d'un défaut de confection est 0,05.

1. Calculer la probabilité qu'un vêtement ait les deux défauts.

2. Montrer que la probabilité qu'un vêtement soit sans défaut est 0,931.

En une semaine, l'entreprise fabrique 1 000 vêtements. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de vêtements sans défaut fabriqués en une semaine.

3. Quelle est la loi de X ? Calculer son espérance et son écart-type.

4. Pourquoi la loi de $\frac{X-931}{8}$ peut-elle être approchée par la loi normale centrée réduite ?

5. En utilisant cette approximation, calculer :

$$P(927 \leqslant X \leqslant 935).$$

6. À l'aide de la même approximation, pour quelle valeur de x arrondie à l'entier le plus proche a-t-on $P(X \leqslant x) = 0{,}95$?

$P(D_1) = 0{,}02 \qquad P(D_2) = 0{,}05.$

1) $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P(D_2)$ car D_1 et D_2 sont indépendants

$P(D_1 \cap D_2) = 0{,}02 \times 0{,}05 = 0{,}001$

2) $P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}) = 0{,}98 \times 0{,}95 = 0{,}931$

Th : si D_1 et D_2 sont indépendants alors $\overline{D_1}$ et $\overline{D_2}$ sont aussi indépendants.

$P(\overline{D_1}) = 1 - P(D_1) \ldots$

3) $X \sim \mathcal{B}(1000 ; 0{,}931)$ car X "compte" le nombre de succès lorsque l'on répète 1000 fois de façon identique et indépendante une expérience à 2 issues possibles de proba de succès chacune égale à 0,931

$E(X) = np = 1000 \times 0{,}931 = 931$

$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000 \times 0{,}931 \times 0{,}069} \approx 8$

4) $\dfrac{X-931}{8} = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

$n = 1000$ donc $n \geqslant 30$; $np = 931$ donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) = 69$ donc $n(1-p) \geqslant 5$

on peut donc appliquer le th. de Moivre Laplace :

$$\frac{X-931}{8} \sim \mathcal{N}(0;1)$$

5) $(927 \leqslant X \leqslant 935) \iff \left(\dfrac{927-931}{8} \leqslant \dfrac{X-931}{8} \leqslant \dfrac{935-931}{8}\right) \iff \left(-0{,}5 \leqslant \underbrace{\dfrac{X-931}{8}}_{Z} \leqslant 0{,}5\right)$

Des évé équivalents ont même proba.

$P(927 \leqslant X \leqslant 935) = P(-0{,}5 \leqslant Z \leqslant 0{,}5)$ $\qquad \boxed{Z \sim \mathcal{N}(0;1)}$

$$= \int_{-0{,}5}^{0{,}5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$$

Préférer le menu STAT de la calculatrice DIST Ncd

$\approx 0{,}383$

6) $P(X \leqslant x) = 0{,}95$

Grâce à la calculatrice : $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$ $\quad P(Z \leqslant 1{,}64) \approx 0{,}95$

6) $P(X \leq x) = 0{,}95$

grâce à la calculatrice, si $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$: $P(Z \leq 1{,}64) = 0{,}95$.

$\left(Z \leq 1{,}64\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{x-931}{8} \leq 1{,}64\right) \Leftrightarrow \left(x \leq 8 \times 1{,}64 + 931\right)$

$8 \times 1{,}64 + 931 = 944{,}12$.

la valeur arrondie à l'entier le plus proche vaut 944.

$P(X \leq 944) \approx 0{,}95$.