vendredi 10 avril 2020 08:49

Exercice. 118 page 205

$f(x) = 3 - x^2$ et $g(x) = x^2 - 3x + 4$

1) Position relative de C_f par rapport à C_g.

$f(x) - g(x) = 3 - x^2 - (x^2 - 3x + 4) = -2x^2 + 3x - 1$ trinôme du 2nd degré à coef réels.

$\Delta = 1$

$x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

signe de $a = -2$ à l'ext des racines

2) aire entre les courbes $= \mathcal{A} = \int_{1/2}^{1} f(x) - g(x)\,dx = \int_{1/2}^{1} -2x^2 + 3x - 1\,dx$

$\mathcal{A} = \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x\right]_{1/2}^{1} = \left(-\frac{2}{3}\times 1^3 + \frac{3}{2}\times 1^2 - 1\right) - \left(-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6} - \left(-\frac{5}{24}\right)$

$\mathcal{A} = \frac{1}{24}$ u.a.

$1\,u.a = 5 \times 3 = 15\,cm^2$ car $\|\vec{i}\| = 5\,cm$ et $\|\vec{j}\| = 3\,cm$.

$\mathcal{A} = \frac{1}{24} \times 15 = \frac{5}{8}\,cm^2 = \boxed{0,625\,cm^2}$

Calcul intégral : exercice 166 page 219

vendredi 10 avril 2020 10:03

Exercice 166 page 219

Pour x dans $[0;1]$, $f(x)=e^{-x^2}$.

Pour tout naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2}\,dx$.

1) a) $0 \leq x \leq 1$

donc $0 \leq x^2 \leq 1$ car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

$\times(-1)$ $-1 \leq -x^2 \leq 0$ $\times(-1)$

donc $e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq e^0$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1}$$

2) $u_0 = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

d'après 1) $\frac{1}{e} \leq e^{-x^2} \leq 1$ si $x \in [0;1]$

$$\int_0^1 \frac{1}{e}\,dx \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leq \int_0^1 1\,dx$$ car l'ordre est conservé par intégration $(0<1)$

$$\left[\frac{1}{e}\times x\right]_0^1 \leq u_0 \leq [x]_0^1$$

$$\boxed{\frac{1}{e} \leq u_0 \leq 1.}$$

2) $u_1 = \int_0^1 x e^{-x^2}\,dx$. $\int u' e^u$.

$u(x) = -x^2$ donc $u'(x) = -2x$.

$$u_1 = \int_0^1 x e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 -\frac{1}{2}\times \underbrace{(-2x)e^{-x^2}}_{u'e^u}\,dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1} - \left(-\frac{1}{2}e^0\right) = \frac{1}{2}\left(1-e^{-1}\right)$$

$$\boxed{u_1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)}$$

3 a) $u_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2}\,dx$.

Sur $[0;1]$ $x^n \geq 0$ et la fonction exponentielle est strict. positive sur $\mathbb{R}$

Sur $[0;1]$ $x^n \geq 0$ et la fonction exponentielle est strict. positive sur $\mathbb{R}$

donc $x^n e^{-x^2} \geq 0$. Comme $0 < 1$, $u_n \geq 0$ (l'ordre est conservé)

donc u_n est une aire positive

b] Pour tout naturel n non nul

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x^2} dx - \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx$$

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x^2} - x^n e^{-x^2} dx .$$ par linéarité de l'intégrale