Exercice 105 page 318.

105. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit (P) le plan d'équation $3x+y-z-1=0$ et (D) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = -t+2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. a. Le point $C(1\,;3\,;2)$ appartient-il au plan (P) ? Justifier.
b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans le plan (P).

2. Soit (P') le plan passant par le point C et orthogonal à la droite (D).
a. Déterminer une équation cartésienne du plan (P').
b. Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan (P') et de la droite (D).
c. Montrer que $CI = \sqrt{3}$.

3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite (D) de coordonnées $(-t+1\,;2t\,;-t+2)$.
a. Vérifier que, pour tout réel t : $CM^2 = 6t^2 - 12t + 9$.
b. Montrer que CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

1) a) $C \notin (P)$

b) $(D) \subset (P)$

2°) (P') plan passant par C orthogonal à (D) a pour équation $-x+2y-z-3=0$

b) $\{I\} = (P') \cap (D)$

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = -t+2 \\ -x+2y-z-3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = -t+2 \\ -(1-t)+2(2t)-(-t+2)-3=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = -t+2 \\ 6t-6=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1-1 = 0 \\ y = 2\times1 = 2 \\ z = -1+2 = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

$I(0\,;2\,;1)$

c) $\vec{CI}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-3 \\ 1-2 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $CI^2 = (-1)^2+(-1)^2+(-1)^2 = 3$

$CI = \sqrt{3}$ car c'est une longueur (positif)

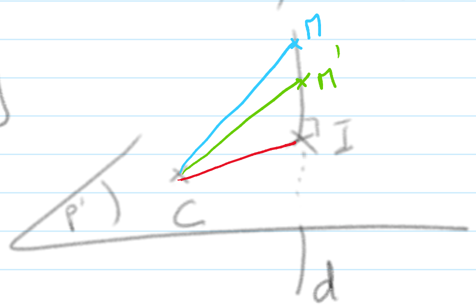
3) $\vec{CM}\begin{pmatrix} -t+1-1 \\ 2t-3 \\ -t+2-2 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -t \\ 2t-3 \\ -t \end{pmatrix}$

$CM^2 = (-t)^2 + (2t-3)^2 + (-t)^2$ $\quad (\vec{CM}^2 = \vec{CM}\cdot\vec{CM})$

$CM^2 = t^2 + 4t^2 - 12t + 9 + t^2$

$CM^2 = 6t^2 - 12t + 9$

b)



CM est minimal lorsque CM^2 est minimal

On cherche t tel que $f(t) = 6t^2 - 12t + 9$ est minimal

$f'(t) = 12t - 12$

t	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	3	$\nearrow$	

car $12t - 12 = 0$
$t = 1$

f est minimal lorsque $t = 1$

ou $f(t)$ est de la forme at^2+bt+c avec $a = 6 > 0$

donc f admet un minimum en $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-12}{2\times6} = 1$.

Quand $t = 1$, M_t a pour coord $(0\,;2\,;1)$; on retrouve les coord de I

$2a$ 2×6

Quand $t = 1$, M_t a pour coord $(0 ; 2 ; 1)$; on retrouve les coord de I

CI est donc la valeur min.

$f(1) = 3$, on retrouve $CI = \sqrt{3}$

Produit scalaire

lundi 8 juin 2020 18:27

Exercice 107 page 318

107. L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(-2\,;0\,;1)$, $B(1\,;2\,;-1)$ et $C(-2\,;2\,;2)$.

1. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, puis les longueurs AB et AC.

b. En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

c. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$2x - y + 2z + 2 = 0.$$

3. Soit (P_1) et (P_2) les plans d'équations respectives :

$$x + y - 3z + 3 = 0 \text{ et } x - 2y + 6z = 0.$$

Montrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants selon une droite (D) dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

4. Démontrer que la droite (D) et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

5. Soit S la sphère de centre $\Omega(1\,;-3\,;1)$ et de rayon $r = 3$.

a. Donner une équation cartésienne de la sphère S.

b. Étudier l'intersection de la sphère S et de la droite (D).

c. Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère S.

1 a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-2)\\2-0\\-1-1\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2-(-2)\\2-0\\2-1\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3\times0 + 2\times2 + (-2)\times1 = 2$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC} = 2$

$AB^2 = 3^2+2^2+(-2)^2 = 9+4+4 = 17.$

$AC^2 = 0^2+2^2+1^2 = 5.$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \sqrt{17}\times\sqrt{5}\times\cos\widehat{BAC} = 2$

$\cos\widehat{BAC} = \dfrac{2}{\sqrt{17}\times\sqrt{5}}$ donc $\widehat{BAC} \approx 77°$

c) $\widehat{BAC} \neq 0$ ou $\widehat{BAC} \neq 180$

les points A, B, C ne sont pas alignés

2°) $A(-2;0;1)$: $2\times(-2) - 0 + 2\times1 + 2 = 0$

$B(1;2;-1)$: $2\times1 - 2 + 2\times(-1) + 2 = 0$

$C(-2;2;2)$: $2\times(-2) - 2 + 2\times2 + 2 = 0$

Les coord de A, B, C vérifient l'éq° : $2x - y + 2z + 2 = 0$

c'est donc une éq° du plan (ABC)

3) (P_1) : $x + y - 3z + 3 = 0$ $\quad \vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ est un vect. normal à (P_1)

$\times 1$

(P_2) : $x - 2y + 6z = 0$ $\quad \vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}$ est un vect. normal à (P_2)

$\times(-2)$

Les coord de $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires donc (P_1) et (P_2) ne sont pas parallèles donc ils sont sécants suivant (d)

(d) $\begin{cases} x+y-3z+3=0 \\ x-2y+6z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-3t+3=0 \\ x-2y+6t=0 \\ z=t \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+3=3t & L_1 \\ x-2y=-6t & L_2 \\ z=t \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2x+2y+6+x-2y=0 & 2L_1+L_2 \\ x+y+3-x+2y=3t+6t & L_1-L_2 \\ z=t \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+6=0 \\ 3y+3=9t \\ z=t \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2 \\ y=3t-1 \\ z=t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

4) (ABC) : $2x - y + 2z + 2 = 0$, $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ vecteur normal au plan (ABC)

(d) $\begin{cases} x=-2 \\ y=3t-1 \end{cases}$ $\quad \vec{u}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ est v.d de (d).

$(d) \begin{cases} x = -2 \\ y = 3t - 1 \\ z = t \end{cases}$ $\quad \vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est v.d de (d).

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \times 2 + 3 \times (-1) + 1 \times 2 = -1 \neq 0$$

donc (d) n'est pas parallèle au plan (ABC) donc (d) coupe (ABC)

en un point $I(x ; y ; z)$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3t - 1 \\ z = t \\ 2x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2 \\ y = 3t - 1 \\ z = t \\ 2 \times (-2) - (3t - 1) + 2t + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \\ z = -1 \\ t = -1 \end{cases}$$

$$I(-2 ; -4 ; -1)$$