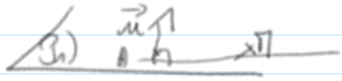


Exercice 70 page 313.

70. 1. Déterminer une équation cartésienne des plans (P_1) et (P_2) tels que :

a. le plan (P_1) passant par le point $A(4\,;2\,;1)$ et de vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-4\\y-2\\z-1\end{pmatrix}$

b. le plan (P_2) passant par le point $B(2\,;-1\,;0)$ et de vecteur normal $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-2\\y+1\\z\end{pmatrix}$

2. Quelle est la nature de $(P_1)\cap(P_2)$? Justifier.

1 a) $M(x\,;y\,;z)\in(P_1) \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$

$\iff (x-4)\times 1+(y-2)\times 0+(z-1)\times(-1)=0$

$\iff x-4+0-z+1=0$

$\iff x-z-3=0.$ (P_1)

OU d'après le cours, un plan de v. n $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ a une éq$^{\circ}$ du type $ax+by+cz+d=0$ donc ici $P_1 : 1x+0y-1z+d=0$

$A\in P_1$ donc $4+0-1+d=0$ càd $3+d=0$ donc $d=-3$

$(P_1) : x-z-3=0.$

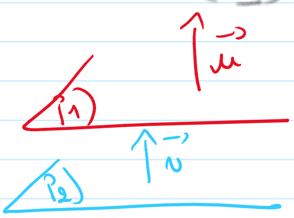
b) $M(x;y;z)\in P_2 \iff \overrightarrow{BM}\cdot\vec{v}=0$

$\iff (x-2)\times 2+(y+1)\times(-1)+3\times z=0$

$\iff 2x-4-y-1+3z=0$

$\iff 2x-y+3z-5=0$ (P_2)

2)



P_1 est parallèle à P_2 ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \xrightarrow{\times 2} \vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\times(-3)$ Les coord ne sont pas proportionnelles donc les vect. ne sont pas colinéaires

Par conséquent, P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite.

$M(x;y;z)\in P_1\cap P_2 \iff \boxed{\begin{cases}x-z-3=0\\2x-y+3z-5=0\end{cases}}$ caractérise une droite dans l'espace.

Dans l'espace, une droite est caractérisée :

* soit par une représentation paramétrique ($\underline{3}$ éq$^{\circ}$)
* soit par un système de 2 éq$^{\circ}$ de plans.

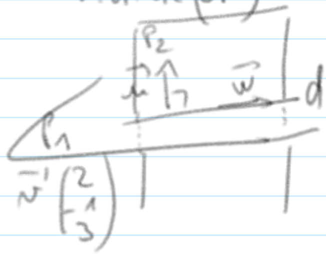
$(d)\begin{cases}x-z-3=0\\2x-y+3z-5=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=t\\-z-3=-x=-t\\-y=-2x-3z+5\end{cases} \iff \begin{cases}x=t\\-z=-t+3\\y=2x+3z-5=2t+3(\underbrace{t-3}_{z})-5\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = t - 3 & L_2 \\ y = 5t - 14 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow (d) \boxed{\begin{cases} x = t \\ y = 5t - 14 & L_3 \\ z = t - 3. & L_2 \end{cases}} \; t \in \mathbb{R}$$

$C(0\,;-14\,;-3) \in (d)$

en remplaçant t par 0

$\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ v.d. de (d)



vérificat° : (Brouillon)

$$\begin{cases} x_C - z_C - 3 = 0 + 3 - 3 = 0 \\ 2x_C - y_C + 3z_C - 5 = 2 \times 0 + 14 + 3 \times (-3) - 5 = 0 \end{cases}$$

$\vec{w} \cdot \vec{u} = 1 \times 1 + 0 \times 5 + 1 \times (-1) = 1 - 1 = 0$

$\vec{w} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + (-1) \times 5 + 3 \times 1 = 2 - 5 + 3 = 0$

Produit scalaire

vendredi 5 juin 2020 11:35

Exercice 105 page 318.

105. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit (P) le plan d'équation $3x + y - z - 1 = 0$ et (D) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. a. Le point $C(1 ; 3 ; 2)$ appartient-il au plan (P) ? Justifier.

b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans le plan (P).

2. Soit (P') le plan passant par le point C et orthogonal à la droite (D).

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (P').

b. Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan (P') et de la droite (D).

c. Montrer que $CI = \sqrt{3}$.

3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite (D) de coordonnées $(-t + 1 ; 2t ; -t + 2)$.

a. Vérifier que, pour tout réel t : $CM^2 = 6t^2 - 12t + 9$.

b. Montrer que CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

1) $3 \times 1 + 3 - 2 - 1 = 3 \neq 0$
donc $C \notin (P)$

b) Soit $M(x ; y ; z)$ appartenant à (D)

il existe un réel t tq $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases}$

$3 \times \underbrace{(1-t)}_{x} + \underbrace{2t}_{y} - \underbrace{(-t+2)}_{z} - 1$

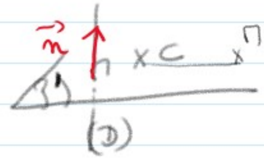
$3 \times x + y - z - 1$

$= 3 - 3t + 2t + t - 2 - 1$

$= 0t + 0 = 0$

Les coord de M vérifient l'éq° de (P)
donc
$(D) \subset P$

2) a)



$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un v.d de D

mais aussi un vecteur normal à P'.

$M(x ; y ; z) \in P' \iff \vec{CM} \cdot \vec{u} = 0$

$\iff (x-1) \times (-1) + (y-3) \times 2 + (z-2) \times (-1) = 0$

$\iff -1x + 1 + 2y - 6 + (-z) + 2 = 0$

$\iff -x + 2y - z - 3 = 0 \quad (P')$