Exercices sur la fonction logarithme népérien

mercredi 8 avril 2020 09:18

Rituel : Calculer $\displaystyle\int_1^5 \frac{3}{x}+7\,dx$

$1<x<5$ donc une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln x$.

$$\int_1^5 \frac{3}{x}+7\,dx = \Big[3\ln x + 7x\Big]_1^5 = (3\ln 5+35)-(3\ln 1+7) = 3\ln 5+28 \simeq 32{,}83$$

Suite de l'exercice 91 page 143.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$? $\quad D =]-\infty;-1[\,\cup\,]0;+\infty[$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x = 0\\ \lim\limits_{x\to 0} x+1 = 1\end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x+1} = 0$ par valeurs supérieures.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x+1} = 0^+\\ \lim\limits_{\substack{X\to 0\\ >}} \ln X = -\infty\end{array}\right\}$ Par composée, $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\infty$

La droite d'équation $x=0$ est asymptote à C_f.

Exercice 92 page 143

1) $f(x) = x - \ln x \quad (x>0)$ $\qquad D =]0;+\infty[$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x = 0\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x-\ln x = +\infty$ par différence.

donc l'axe des ordonnées est asymptote à C_f

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty\end{array}\right\}$ obtention d'une F.I.

$f(x) = x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (théorème des croissances comparées)

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{\ln x}{x} = 1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\end{array}\right\}$ Par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3) $f(x) = x - \ln(x^2)$ $\qquad x^2>0 \iff x\neq 0.$ $\quad D = \mathbb{R}^* =]-\infty;0[\,\cup\,]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ $\qquad$ Par différence,

$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
$\lim_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$
Par composée $\lim_{x \to -\infty} \ln x^2 = +\infty$

Par différence, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} x = 0$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} x^2 = 0^{(+)}$
$\lim_{\substack{X \to 0 \\ >}} \ln X = -\infty$
Par composée $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \ln x^2 = -\infty$

Par différence, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$.

de même $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$ l'axe des ordonnées est asymptote à C_f

$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$
$\lim_{x \to +\infty} \ln x^2 = +\infty$
Par différence, FI

Si $x > 0$ $\ln(x^2) = 2\ln x$

$f(x) = x - 2\ln x = x\left(1 - \frac{2\ln x}{x}\right)$

Grâce au th des croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{2\ln x}{x} = 1$
$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$
Par produit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 110 p. 144

1) $f(x) = \ln(\boxed{4x+1})$ $D =]-\frac{1}{4} ; +\infty[$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$f'(x) = \frac{4}{\boxed{4x+1}}$ $u > 0$

Si $x \in D$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur D

2) $g(x) = \ln(1 - x^2)$ $D =]-1 ; 1[$

$g'(x) = \frac{-2x}{\boxed{1 - x^2}} > 0$

x	-1		0		1
$-2x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
f	‖	↗		↘	‖

Rq $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ Comme $u(x) > 0$, $(\ln u)'$ et u' ont m̂ signe

donc u et $\ln u$ ont m̂ variations.

Exercice 111 p 144

1) $f(x) = (\ln x)^2$ $\quad D = \mathbb{R}^{*+}$.

$x \longmapsto \underbrace{\ln x}_{u} \xmapsto{\wedge 2} (\ln x)^2$ $\qquad (X^2)' = 2X$

$f'(x) = \frac{1}{x} \times 2 \times \ln x = \frac{2\ln x}{x}$

ou

$f(x) = (\ln x)^2 = \ln x \times \ln x$.

$f'(x) = \frac{1}{x} \times \ln x + \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{2\ln x}{x}$

2) $g(x) = \ln(\ln(x))$ $\qquad \ln x > 0 \iff e^{\ln x} > e^0 \iff x > 1$

$x > 0$.

$D =]1; +\infty[$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $\qquad u(x) = \ln x$ donc $u'(x) = \frac{1}{x}$.

$g'(x) = \frac{1/x}{\ln x} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x}$

3) $h(x) = \ln\left(\boxed{\frac{x+1}{x-1}}\right)$ > 0

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

$D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

$u(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $\quad ; \quad u'(x) = \frac{1(x-1) - (x+1) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

$h'(x) = \frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} = -\frac{2}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$

Exercice 121 page 145.

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) \quad \text{avec } x \in \left]-1 ; +\infty\right[.$$

1) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $\qquad u(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$

$$u'(x) = \frac{1(x^2+1) - (x+1)\times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}}{\frac{x+1}{x^2+1}} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} \times \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)(x+1)}$$

2) $-x^2-2x+1 = 0$ $\qquad \Delta = (-2)^2 - 4\times(-1)\times 1 = 8$

2) $x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{-2} = -1+\sqrt{2} \approx 0,41$ $\qquad$ et $x_2 = -1-\sqrt{2} \approx -2,41$

x		x_2	-1	x_1	
$-x^2-2x+1$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$$

3)4)

x	-1		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x^2-2x+1$		$+$	0	$-$	
$x+1$	0	$+$		$+$	
x^2+1		$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1+1/x\right)}{x^2\left(1+1/x^2\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1+1/x}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 0 \text{ par opérations.}$$

$$\lim_{X \to 0} \ln X = -\infty$$

Par composée $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{0}{2} = 0 \text{ par quotient}$$

$$\lim_{X \to 0} \ln X = -\infty$$

Par composée, $\lim_{x \to -1} \ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) = -\infty$

$$f(-1+\sqrt{2}) = \ln\left(\frac{-1+\sqrt{2}+1}{(-1+\sqrt{2})^2+1}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0,188$$