Fonction logarithme népérien : exercices.

mardi 7 avril 2020 08:47

Exercice 91 page 143

1) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+2}$ et $\begin{cases} x+2 \neq 0 \iff x \neq -2 \\ x > 0 \end{cases}$

$D =]0 ; +\infty[$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0} x+2 = 2 \end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à C_f.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x+2 = +\infty \end{array}\right\}$ obtention d'une F.I du type "$\dfrac{\infty}{\infty}$"

Cours sur les croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \boxed{0}$

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x+2} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x \times 1}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{1}{1+\frac{2}{x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{2}{x} = 1$ (par somme)

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+\frac{2}{x}} = \boxed{1}$ (par quotient)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

la droite d'équation $y = 0$ est asymptote en $+\infty$

Exercice 91 page 143 question 2

mardi 7 avril 2020 09:27

2) $f(x) = x \ln(\boxed{x+1})$

$x+1 > 0 \iff x > -1$ $\quad D =]-1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{\boxed{x \to -1}} x+1 = 0$

$\lim\limits_{X \to 0} \ln X = \boxed{-\infty}$

Par composée (ln est une fonction continue sur $\mathbb{R}^{*+}$)

$\lim\limits_{\boxed{x \to -1}} \ln(x+1) = \boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{x \to -1} x = \boxed{-1}$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$

donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote à C_f.

de même

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x+1 = +\infty$

$\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = \boxed{+\infty}$

Par composée,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) = \boxed{+\infty}$

Par produit

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 91 page 143

mardi 7 avril 2020 09:38

3) $f(x) = (x+1)\ln \boxed{x}$

$D =]0;+\infty[$.

$\lim\limits_{x \to 0} x+1 = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
donc par produit,
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à C_f en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x+1 = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
Par produit,
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 91page 143 question 4

mardi 7 avril 2020 09:43

4) $f(x) = \ln\left(\boxed{\frac{x}{x+1}}\right)$ >0

Tableau de signes :

$x+1=0 \iff x=-1$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x}{x+1}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

affine $m=1$

ou $\frac{x}{x+1} > 0 \iff x(x+1) > 0$

par théorème, $x(x+1)$ est du signe de $a=1$ à l'ext des racines (-1 et 0).

$D =]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{\boxed{x \to -\infty}} \frac{x}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$

$\lim\limits_{X \to 1} \ln X = \boxed{0}$

Par composée

$\lim\limits_{\boxed{x\to-\infty}} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \boxed{0}$

donc la droite d'équation $y=0$ est asymptote à C_f en $-\infty$

de même en $+\infty$

$\lim\limits_{\boxed{x\to+\infty}} \frac{x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$

$\lim\limits_{X\to 1} \ln X = \boxed{0}$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{0}$

la droite d'équation $y=0$ (axe des abscisses) est asymptote à C_f en $+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} \frac{x^{\ominus}}{(x+1)_{\ominus}} = +\infty$ règle des signes

$\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$.

donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x) = +\infty$

la droite d'équation $x=-1$ est asymptote à C_f