Loi exponentielle : exercices.

mardi 5 mai 2020 08:35

Exercice 85 page 358.

$f(x) = \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}x}$ donc $X \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{10}\right)$

$\lambda = \frac{1}{10}$

2) $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ (cours) donc $E(X) = 10$

$$P(X>100) = 1 - P(X \leq 100) = 1 - \int_0^{100} \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}x}\,dx = 1 - \left[-e^{-\frac{1}{10}x}\right]_0^{100}$$

$$= 1 - \left(-e^{-\frac{1}{10}\times 100} + e^0\right) = \boxed{e^{-10} \approx 4{,}54 \times 10^{-5}}$$

Exercice 86 page 358

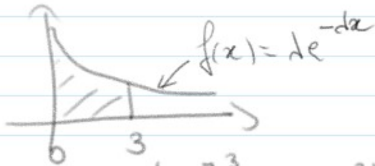
$X \sim \mathcal{E}(1)$ donc $f(x) = 1 \times e^{-1x} = e^{-x}$

$$P(X>2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \int_0^2 e^{-x}\,dx = 1 - \left[-e^{-x}\right]_0^{2} = 1 - \left(-e^{-2} + 1\right)$$

$$= \boxed{e^{-2} \approx 0{,}135}$$

ou d'après le cours : $P(X > t) = e^{-\lambda t}$ avec $t = 2$

Exercice 87 page 87.



$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$P(X \leq 3) = \frac{2}{3}$ donc $P(X \leq 3) = \int_0^3 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^3 = -e^{-3\lambda} + e^0 = -e^{-3\lambda} + 1$

à connaître

$$-e^{-3\lambda} + 1 = \frac{2}{3} \iff -e^{-3\lambda} = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} \iff e^{-3\lambda} = \frac{1}{3}$$

$$\iff \ln\left(e^{-3\lambda}\right) = \ln\frac{1}{3} \iff -3\lambda = \ln\frac{1}{3} = \ln 1 - \ln 3 = -\ln 3$$

$$\iff \boxed{\lambda = \frac{-\ln 3}{-3} = \frac{\ln 3}{3}}$$

$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{3}{\ln 3}$

$$P_{(X>2)}(X \geq 5) = P_{(X>2)}(X \geq 2+3) \underset{(*)}{=} P(X \geq 3) \underset{☆}{=} 1 - P(X<3) = e^{-\lambda \times 3} \quad \text{(cours)}$$

$$= e^{-\frac{\ln 3}{3} \times 3} = e^{-\ln 3} = e^{\ln\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

(*) X suit une loi de durée de vie sans vieillissement

ou plus rapide ☆ $P(X>3) = 1 - P(X<3) = 1 - P(X \leq 3)$ X suit une

$= e \qquad = e \qquad = e \qquad = \frac{\ }{3}$ de IR sans vieillissement.

au plus rapide $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 3)$ X suit une loi de densité

$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Loi exponentielle : cours

mardi 5 mai 2020 09:44

Démonstration de : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$E(X) = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t x f(x)\,dx$$

$$\int_0^t x f(x)\,dx = \int_0^t \underbrace{\boxed{x} \times \lambda \boxed{e^{-\lambda x}}}\,dx$$

1ère étape : soit g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = x e^{-\lambda x}$

Dérivée de g $\quad (uv)' = u'v + uv'$

$$g'(x) = 1 \times e^{-\lambda x} + x \times (-\lambda e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x} - x \times \lambda e^{-\lambda x}$$

2ième étape : Primitive de $x \mapsto x \lambda e^{-\lambda x}$

$$\underbrace{x \lambda e^{-\lambda x}} = \underbrace{e^{-\lambda x}} - g'(x) = \left(\frac{1}{-\lambda} e^{-\lambda x}\right)' - g'(x) = \underbrace{\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} - g\right)'(x)}$$

Primitive de $(x \longmapsto x \times \lambda e^{-\lambda x})$ est : $-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} - g(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} - x e^{-\lambda x}$

3ième étape. Calcul

$$\int_0^t x \times \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} - x e^{-\lambda x}\right]_0^t$$

$$= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} - t e^{-\lambda t} - \left(-\frac{1}{\lambda} e^0 - 0 e^0\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \underbrace{- \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} - t e^{-\lambda t}}$$

4ième étape : calcul de limites.

$\lim_{t \to +\infty} -\lambda t = -\infty$ ($\lambda > 0$)

$\lim_{X \to -\infty} e^X = 0$.

Par composée $\lim_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = 0$ donc $\lim_{t \to +\infty} -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} = 0$.

D'après le théorème des croissances comparées : $\lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$

$$-t e^{-\lambda t} = -\frac{\lambda t}{e^{+\lambda t}} \times \frac{1}{\lambda} \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$\lim_{t \to +\infty} \lambda t = +\infty$

$\lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$

Par composée : $\lim_{t \to +\infty} \frac{\lambda t}{e^{\lambda t}} = 0$ donc $\lim_{t \to +\infty} -\frac{1}{\lambda} \times \frac{\lambda t}{e^{\lambda t}} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Par somme $\displaystyle \lim_{t \to +\infty} \int_0^t x \times \lambda e^{-\lambda x} \, dx = \frac{1}{\lambda}$

donc $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.