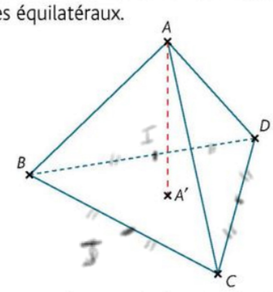
Produit scalaire

mardi 2 juin 2020 08:28

Exercice 65 page 313.

65. BAC Dans cette partie, *ABCD* est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un solide dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.



A' est le centre de gravité du triangle *BCD*. Dans un tétraèdre, le segment joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée est appelé médiane. Ainsi, le segment [*AA'*] est une médiane du tétraèdre *ABCD*.
On souhaite démontrer la propriété suivante :
(1) : Dans un tétraèdre régulier, chaque médiane est orthogonale à la face opposée.

1. Montrer que $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ et que $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
On pourra utiliser le point I milieu du segment [BD].
2. En déduire que la médiane (*AA'*) est orthogonale à la face *BCD*.

1) $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BD} =$

BDC est équilatéral
A' centre de gravité (point d'intersection des médianes)
(CA') est médiane et donc hauteur

$(CA') \perp (BD)$
le point d'intersection de (CA') et de (BD) (qui est le milieu de [BD]) est donc le projeté orthogonal de A' sur [BD] est le milieu de [BD] et, dem pr A

$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{II} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

ou

$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IA'}) \cdot \overrightarrow{BD}$ grâce à la relation de Chasles.

$= \underbrace{\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{IA'} \cdot \overrightarrow{BD}}_{=0}$

car (AI) est médiane et donc hauteur du tri équilatéral ABD
(IA') " " " CBD

$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JA'}) \cdot \overrightarrow{BC} = \underbrace{\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BC}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{JA'} \cdot \overrightarrow{BC}}_{=0} = 0$

car $(AJ) \perp (BC)$ car $(JA') \perp (BC)$

2) $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ donc (AA') est orthogonale à (BD)
$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ donc (AA') est orthogonale à (BC)
(BC) et (BD) sont 2 droites sécantes du plan (BCD)

donc (AA') est orthogonal au plan (BCD)

Dans un repère orthonormé,

(1) Un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

(2) Réciproquement, a, b, c et d étant quatre réels avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \quad \vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Démonstration. Soit P un plan passant par A $(x_A; y_A; z_A)$ et de vect. normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$M(x; y; z) \in P \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$

$\iff (x - x_A) \times a + (y - y_A) \times b + (z - z_A) \times c = 0$

$\iff ax - ax_A + by - by_A + cz - cz_A = 0$

$\iff ax + by + cz \underbrace{- ax_A - by_A - cz_A}_{+d} = 0$

(2) : $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$

$(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ signifie que les trois réels a, b, c ne sont pas tous nuls en m tps

soit $a \neq 0$; $A\left(-\frac{d}{a} ; 0 ; 0\right)$ appartient à l'ens. des points tq $ax + by + cz + d = 0$

car $\underbrace{a \times \left(-\frac{d}{a}\right)}_{-d} + b \times 0 + c \times 0 + d = 0$

$-d + 0 + 0 + d = 0$

soit $b \neq 0$, $A'\left(0 ; -\frac{d}{b} ; 0\right)$ appartient à l'ens. des points tq $ax + by + cz + d = 0$

car $a \times 0 + b \times \left(-\frac{d}{b}\right) + c \times 0 + d = 0$

soit $c \neq 0$ $A''\left(0 ; 0 ; -\frac{d}{c}\right)$ appartient à l'ens. des points tels que $ax + by + cz + d = 0$

Il existe toujours au moins un point $A(x_A; y_A; z_A)$ tq $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$

$M(x; y; z)$ tq $\quad ax + by + cz + d = 0$

$A(x_A; y_A; z_A)$ tq $\quad ax_A + by_A + cz_A + d = 0.$

donc $a \times (x - x_A) + b \times (y - y_A) + c \times (z - z_A) = 0.$

$\iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

$\iff$ M appartient au plan passant A et de vect. normal $\vec{n}$.

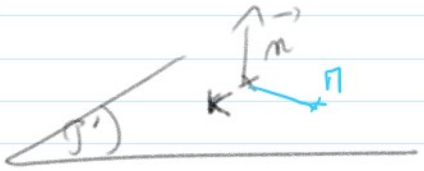
Produit scalaire

jeudi 4 juin 2020 15:32

Donner un vecteur normal à $\mathcal{P} : y + z = 0$. de la forme $ax + by + cz + d = 0$

avec $a = 0$, $b = 1$; $c = 1$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vect. normal à $\mathcal{P}$.

Déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}'$ de vecteur normal $\vec{n}(2; -1; 0)$ passant par $K(1; 1; 1)$.



$\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$

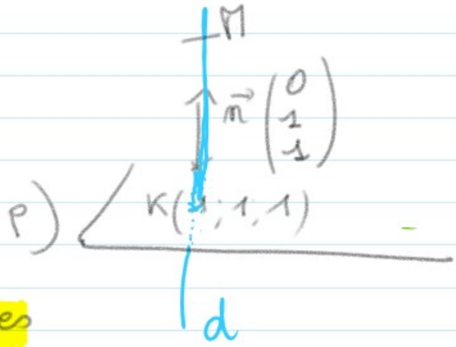
$M(x; y; z) \in \mathcal{P}' \iff \overrightarrow{KM} \cdot \vec{n} = 0$

$\iff (x-1)\times 2 + (y-1)\times(-1) + (z-1)\times 0 = 0$

$\iff 2x - 2 - y + 1 + 0 = 0$

$\iff 2x - 1y - 1 = 0$

Représentation paramétrique de la perpendiculaire à $\mathcal{P} : y + z = 0$ contenant $K(1; 1; 1)$



$M(x; y; z) \in d \iff \overrightarrow{KM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\iff$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{KM} = t \times \vec{n}$

$\iff \begin{cases} x - 1 = t \times 0 \\ y - 1 = t \times 1 \\ z - 1 = t \times 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

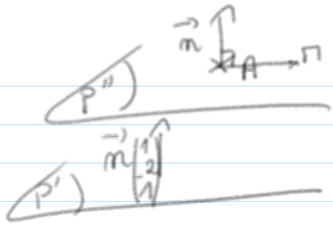
$\iff \boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}}$

Système d'éq. paramétriques de d

Produit scalaire

jeudi 4 juin 2020 15:34

Équation cartésienne du plan $\mathcal{P}''$ parallèle à $\mathcal{P}'$: $x - 2y + z = 0$ passant par $A(1;0;0)$?



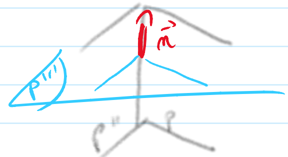
$M(x;y;z)$ appartient au plan passant par $A(1;0;0)$ et de v. normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0 \iff (x-1)\times 1 + (y-0)\times(-2) + (z-0)\times 1 = 0$

$\iff x - 1 - 2y + z = 0$

$\iff \boxed{x - 2y + z - 1 = 0. \quad (P'')}$

Équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'''$ perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}''$ passant par $A(1;0;0)$?



(P) : $y + z = 0$

(P'') : $x - 2y + z - 1 = 0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ vecteur normal à (P''')

P''' est perpendiculaire à P (P qui a pour vecteur normal $\vec{n_1}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$)

$\iff \vec{n}\cdot\vec{n_1} = 0$

$\iff a\times 0 + b\times 1 + c\times 1 = 0$

$\iff b + c = 0.$

P'' est perpendiculaire à P $\iff \vec{n}\cdot\vec{n_2} = 0$

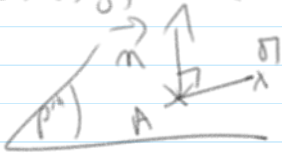
v.n $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\iff 1\times a + (-2)\times b + 1\times c = 0.$

$\iff a - 2b + c = 0$

$\begin{cases} b + c = 0 \\ a - 2b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -c \\ a - 2\times(-c) + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -c \\ a = -3c \end{cases}$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\times c\\-c\\c\end{pmatrix}$ propal. avec à $\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$

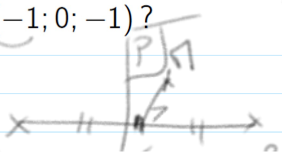
$M(x;y;z) \in P''' \iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0 \iff \underbrace{(x-1)}_{\text{abs de } \overrightarrow{AM}} \times (-3) + (y-0)\times(-1) + (z-0)\times 1 = 0$



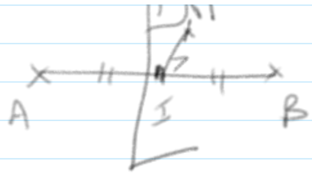
$A(1;0;0)$

$\iff -3x - y + z + 3 = 0.$

Équation cartésienne du plan médiateur de $[AB]$: $A(1;2;3)$ et $B(-1;0;-1)$?



$\hookrightarrow$ passe par le milieu de $[AB]$ et est perpendiculaire à $[AB]$



$\Rightarrow$ plan qui [illegible] milieu de [AB] et perpendiculaire

à [AB]

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est normal à P.

milieu de [AB] $\left(\frac{-1+1}{2} ; \frac{0+2}{2} ; \frac{3+(-1)}{2} \right)$ soit $(0 ; 1 ; 1)$
I

$M(x ; y ; z)$ appartient au plan médiateur de [AB]

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = 0 \Leftrightarrow -2 \times (x - 0) + (-2)(y - 1) + (-4) \times (z - 1) = 0.$

$\Leftrightarrow -2x - 2y - 4z + 6 = 0$