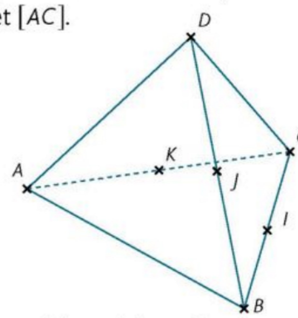
Produit scalaire

mardi 2 juin 2020 08:27

Exercice 64 page 313.

64. Dans le tétraèdre régulier $ABCD$ de côté ℓ, on nomme I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[BD]$ et $[AC]$.



Calculer les produits scalaires suivants :

a. $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; b. $\vec{AD} \cdot \vec{AK}$; c. $\vec{AB} \cdot \vec{IK}$;

d. $\vec{AD} \cdot \vec{JK}$ en écrivant $\vec{JK} = \vec{JD} + \vec{DA} + \vec{AK}$;

e. $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$.

Quelle est la particularité des arêtes opposées d'un tétraèdre régulier ?

a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}\ell^2$ car $AB = AC = BC = \ell$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = \ell \times \ell \times \cos 60° = \frac{1}{2}\ell^2$ car ABC équilatéral

b) $\vec{AD} \cdot \vec{AK} = \vec{AD} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{AC}\right) = \frac{1}{2}\vec{AD} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} \times AD \times AC \times \cos \widehat{DAC}$

$= \frac{1}{2} \times \ell \times \ell \times \cos 60° = \frac{1}{4}\ell^2$.

c) $\vec{AB} \cdot \vec{IK} = - AB \times IK$

$\vec{AB}, \vec{IK}$ sont colinéaires de sens contraire (grâce au th. des milieux dans un triangle)

$\cos 180° = -1$

$\vec{AB} \cdot \vec{IK} = -\ell \times \frac{1}{2}\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$

d) $\vec{AD} \cdot \vec{JK} = \vec{AD} \cdot (\vec{JD} + \vec{DA} + \vec{AK})$ grâce à la relation de Chasles.

$= \vec{AD} \cdot \vec{JD} + \vec{AD} \cdot \vec{DA} + \vec{AD} \cdot \vec{AK}$

$= AD \times JD \times \cos(\widehat{ADJ}) - AD \times DA + \frac{1}{4}\ell^2$

$= \ell \times \frac{1}{2}\ell \times \frac{1}{2} - \ell \times \ell + \frac{1}{4}\ell^2 = -\frac{1}{2}\ell^2$

e) $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot (\vec{CB} + \vec{BD}) = \vec{AB} \cdot \vec{CB} + \vec{AB} \cdot \vec{BD}$

$\vec{AB} \cdot \vec{CB} = (-\vec{BA}) \cdot (-\vec{BC}) = \vec{BA} \cdot \vec{BC}$

$= \vec{BA} \cdot \vec{BC} - \vec{BA} \cdot \vec{BD}$.

$= \ell \times \ell \times \cos \widehat{ABC} - \ell \times \ell \times \cos \widehat{ABD} = 0$

Dans un tétraèdre régulier, les arêtes opposées sont orthogonales.

Produit scalaire

mercredi 3 juin 2020 09:30

Cours : $(\vec{u}-\vec{v})^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

$= \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}$ par bilinéarité

$= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ par symétrie.

donc $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

on retrouve la 1ère expression du produit scalaire.

$2\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

De même, $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$.

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2\vec{u}\cdot\vec{v}$.

$\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \vec{u}\cdot\vec{v}$

Propté : (une droite est orthogonale à un plan)^A ssi (elle est orthogonale à 2 droites sécantes du plan.)^B

$A \Leftrightarrow B$

$A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$

Δ une droite de v.d $\vec{u}$.

d_1 et d_2 2 droites sécantes de P de v.d $\vec{v}$ pour d_1, $\vec{w}$ pour d_2.

$\Rightarrow$ Si Δ est orthogonale à P, alors par déf° de l'orthogonalité, Δ est orthog à toutes les droites de P donc à d_1 et d_2.

$\Leftarrow$ (H) Δ est orthogonale à d_1 et à d_2

Soit d une droite du plan P, on mq Δ est orthog à d.

d_1 et d_2 sont 2 droites sécantes de P donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont 2 vecteurs non colinéaires et forment une base donc il existe 2 réels a et b tq $a\vec{v}+b\vec{w}$ est un v.d de d

$$\underbrace{(a\vec{v}+b\vec{w})}_{\text{v.d de d}}\cdot\underbrace{\vec{u}}_{\text{v.d de }\Delta} = a\underbrace{\vec{v}\cdot\vec{u}}_{0 \text{ cf (H)}} + b\underbrace{\vec{w}\cdot\vec{u}}_{0} = 0$$

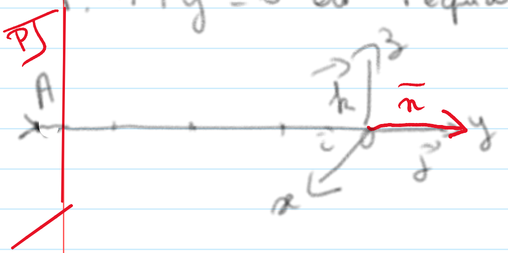
$\vec{v}$ v.d de d_1

$\vec{u}$ v.d de Δ

donc d et Δ sont orthogonales

Test wooclap:

P : $4 + y = 0$ est l'équation d'un plan de v. normal $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$



le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (xOz).

P parallèle à (xOz) passant par $A(0\,;-4\,;0)$

car $4+(-4)=0$