Exercices sur la fonction logarithme népérien

jeudi 2 avril 2020 19:28

Rituel : Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$

Primitive de $\frac{1}{x}$?

$$\ln x \xrightarrow{\text{dérivée}} \frac{1}{x} \qquad \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{primitive}} \ln x$$

$$\int \frac{u'}{u^n} = -\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{u^{n-1}}$$

$u(x) = x$

$u'(x) = 1$

$n = 1$ $\Rightarrow$ division par $n-1 = 0$ IMPOSSIBLE

$$\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln x\Big]_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3 - 0 = \ln 3$$

Si $a>0$ et $b>0$

$\ln(a^n) = n\ln a$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Exercice 50 page 140

50. $\ln 8 = 3\ln 2$; $\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -2\ln 2$;

$\ln(16e) = 4\ln 2 + 1$; $\ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$;

$\ln\left(\frac{64}{e^2}\right) = 6\ln 2 - 2.$

car $8 = 2^3$ donc $\ln(2^3) = 3\ln 2$; $\ln 1 - \ln 2^2$

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$.

$\ln\left(\frac{64}{e^2}\right) = \ln 64 - \ln e^2 = \ln 2^6 - 2\ln e = 6\ln 2 - 2$

Exercice 51 page 140

51. $\ln 10 = \ln(5\times 2) = \ln 5 + \ln 2.$

$\ln 100 = \ln 10^2 = 2\ln 10 = 2(\ln 5 + \ln 2).$

$\ln 0{,}0001 = \ln 10^{-4} = -4\ln 10$

$= -4(\ln 5 + \ln 2).$

$\ln\sqrt{1000} = \frac{3}{2}(\ln 5 + \ln 2).$

$\ln\frac{8}{25} = 3\ln 2 - 2\ln 5.$

$\ln(8\times 10^5) = \ln 8 + \ln 10^5$

$= 3\ln 2 + 5(\ln 5 + \ln 2) = 5\ln 5 + 8\ln 2.$

$\ln(32\times 10^{-8}) = 5\ln 2 - 8(\ln 5 + \ln 2)$

$= -8\ln 5 - 3\ln 2.$

$\ln 0{,}000004 = \ln(4\times 0{,}000001)$

$= 2\ln 2 - 6\ln 5 - 6\ln 2$

$= -6\ln 5 - 4\ln 2.$

$\ln\sqrt{1000} = \frac{1}{2}\ln 1000 = \frac{1}{2}\ln(10^3) = \frac{3}{2}\ln 10 = \frac{3}{2}(\ln 5 + \ln 2)$

$\ln\frac{8}{25} = \ln 8 - \ln 25 = \ln 2^3 - \ln 5^2 = 3\ln 2 - 2\ln 5.$

$\ln(32\times 10^{-8}) = \ln 32 + \ln(10^{-8}) = \ln 2^5 - 8\ln 10 = 5\ln 2 - 8(\ln 2 + \ln 5) = -3\ln 2 - 8\ln 5$

$\ln(4\times 10^{-6}) = \ln 4 + \ln 10^{-6} = 2\ln 2 - 6\ln 10 = 2\ln 2 - 6(\ln 2 + \ln 5)$

$= -4\ln 2 - 6\ln 5$

Ex 52 p.140

1) $\ln\Big(\underbrace{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}_{(a+b)(a-b)}\Big) = \ln\Big(\underbrace{\sqrt{2}^2 - 1^2}_{a^2-b^2}\Big) = \ln 1 = 0$

2) $\ln(\sqrt{7}-2) + \ln(\sqrt{7}+2) = \ln\big((\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)\big) = \ln\big(\sqrt{7}^2 - 2^2\big) = \ln 3$

3) $\ln\left(\sqrt{\sqrt{11}-3}\right) + \ln\left(\sqrt{\sqrt{11}+3}\right) = \ln\left(\sqrt{\sqrt{11}-3}\times\sqrt{\sqrt{11}+3}\right)$

$= \ln\left(\sqrt{(\sqrt{11})^2 - 3^2}\right) = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$

$a>0$, $b>0$

$\ln a + \ln b = \ln(ab)$

$\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

Ex 49 p.140

1) $f(x) = \ln(\boxed{2x-1}) + \ln(\boxed{-x+5})$

Ensemble de définition : $\ln x$ existe ssi $x>0$

f existe ssi $2x-1>0$ ET $-x+5>0$

ssi $x > \frac{1}{2}$ ET $5 > x$

$D_f = \left]\frac{1}{2} ; 5\right[$

$$D_f = \left]\frac{1}{2} ; 5\right[$$

2) $g(x) = \ln\left(\boxed{(2x-1)(-x+5)}\right)$ > 0

$g(x)$ existe ssi $(2x-1)(-x+5) > 0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		5		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x-1)(-x+5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

car affine et $2>0$

donc $D_g = \left]\frac{1}{2} ; 5\right[$

3) $h(x) = \ln\left(\boxed{1+x^2}\right)$ >0 $\qquad D_h = \mathbb{R}$ car $1+x^2 \geq 1 > 0$

4) $i(x) = \ln\left(\boxed{1+e^{2x}}\right)$ >0 $\qquad D_i = \mathbb{R}$ car $1+e^{2x} > 1 > 0$

Ex 60 p.141

3) Résoudre $e^{2\ln\boxed{x}} + 5e^{\ln\boxed{x}} = 6$

1ère étape : ens. de définition : $x > 0$ $\quad$: $D =]0 ; +\infty[$

$e^{2\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^2 \qquad e^{na} = \left(e^a\right)^n$

donc $e^{2\ln x} + 5e^{\ln x} = 6 \iff \left(e^{\ln x}\right)^2 + 5e^{\ln x} = 6 \iff x^2 + 5x - 6 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4 \times (-6) = 49 \qquad x_1 = -6 \notin D$ et $x_2 = 1 \in D$

$$S = \{1\}$$

Ex 66 page 141

1) $\ln\left(\boxed{\frac{x+1}{2x+1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

Ens. de définition $\frac{x+1}{2x+1} > 0$

Tableau de signes

$x+1 = 0 \iff x = -1$

$2x+1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$ V.I

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{2x+1}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$D =]-\infty ; -1[\cup]-\frac{1}{2} ; +\infty[$

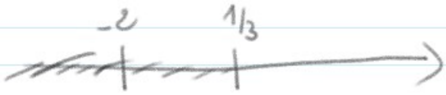
$\ln\left(\frac{x+1}{2x+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \iff \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{3}$ et $x \in D$

$\frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{3} \iff \frac{3(x+1)}{3(2x+1)} - \frac{1}{3} \times \frac{2x+1}{2x+1} = 0 \iff \frac{3x+3-2x-1}{3\times(2x+1)} = 0 \iff x+2 = 0$ et $3(2x+1) \neq 0$

$\iff x = -2 \in D$

$S = \{-2\}$

2) $\ln(\boxed{3x-1}) - \ln(\boxed{x+2}) = -\ln 2$ (E)



$3x - 1 > 0 \iff 3x > 1 \iff x > \frac{1}{3}$

et

$x + 2 > 0 \iff x > -2$

$D = \left]\frac{1}{3} ; +\infty\right[$

$\ln(3x-1) - \ln(x+2) = \ln\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)$

si $a > 0$: $\ln \frac{1}{a} = \ln 1 - \ln a = -\ln a$

$(E) \iff \ln\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ et $x \in D \iff \frac{3x-1}{x+2} = \frac{1}{2}$ et $x \in D \iff \frac{3x-1}{x+2} - \frac{1}{2} = 0$ et $x \in D$

$\frac{3x-1}{x+2} \times \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{x+2}{x+2} = \frac{5x-4}{2(x+2)} = 0 \iff 5x - 4 = 0$ et $2(x+2) \neq 0$

$\iff x = \frac{4}{5} \in D$

$S = \left\{\frac{4}{5}\right\}$

Exercices sur la fonction logarithme népérien

vendredi 3 avril 2020 10:59

Ex 67 p. 141

$\ln\left(\boxed{(2x-1)(x+3)}\right) \geq \ln 15$

> 0

x	$-\infty$		-3		$1/2$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x-1}{x+3}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

$x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

$D =]-\infty;-3[\cup]\frac{1}{2};+\infty[.$

$\ln\left((2x-1)(x+3)\right) \geq \ln 15 \Leftrightarrow (2x-1)(x+3) \geq 15 \Leftrightarrow 2x^2+5x-18 \geq 0$ et $x \in D$

et $x \in D$

$\Delta = 169 \qquad x_1 = \frac{-5-13}{4} = -4,5$ et $x_2 = 2$

x	$-\infty$		$-4,5$	-3	$\frac{1}{2}$	2		$+\infty$
$2x^2+5x-18$		$+$	0	$-$		0	$+$	

signe de $a=2$ à l'ext. des racines

$S =]-\infty;-4,5] \cup [2;+\infty[$

2) $\ln\left(\boxed{2x-1}\right) + \ln\left(\boxed{x+3}\right) \geq \ln 15$

$> 0 \qquad > 0$

$D =]\frac{1}{2};+\infty[$

$\ln(2x-1) + \ln(x+3) \geq \ln 15 \Leftrightarrow \ln\left((2x-1)\times(x+3)\right) \geq \ln 15$ et $x \in D$.

$\Leftrightarrow \underbrace{(2x-1)\times(x+3) \geq 15}$ et $x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq 2 \qquad S = [2;+\infty[$