Exponentielle complexe

vendredi 29 mai 2020 09:06

Exercice 168 page 270

168. On pose :

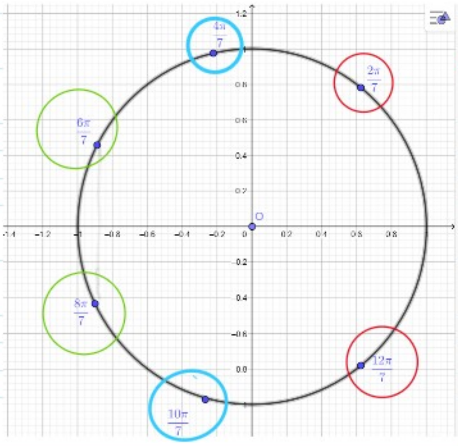
$S = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$;

$S' = \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7} + \cos\frac{12\pi}{7}$;

$\Sigma = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7}$;

$\Sigma' = \sin\frac{8\pi}{7} + \sin\frac{10\pi}{7} + \sin\frac{12\pi}{7}$.

1. Comparer S et S' puis Σ et Σ'.
2. Exprimer $S + S' + i(\Sigma + \Sigma')$ en fonction de $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ $(= \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7})$.
3. En déduire alors la valeur de $S + S' + i(\Sigma + \Sigma')$ puis la valeur de S.



$\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$

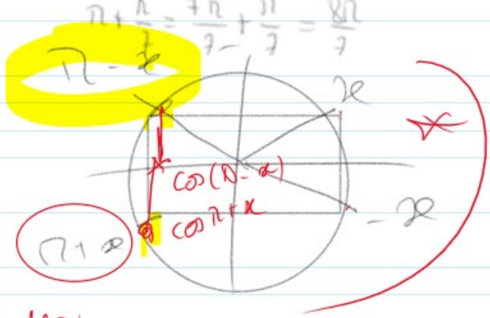
$\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$ en remplaçant x par $\frac{\pi}{7}$

$\pi + \frac{\pi}{7} = \frac{7\pi}{7} + \frac{\pi}{7} = \frac{8\pi}{7}$

$\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{10\pi}{7}\right)$

$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{12\pi}{7}\right)$ ×

donc $S = S'$



× ou

$x = \frac{2\pi}{7} \ (2\pi)$; $-x = -\frac{2\pi}{7} \ (2\pi)$

$= -\frac{2\pi}{7} + \frac{14\pi}{7} \pmod{2\pi}$

$= \frac{12\pi}{7} \pmod{2\pi}$

de même, $\sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x)$

* $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) = -\sin\left(\frac{12\pi}{2}\right)$
* $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) = -\sin\left(\frac{10\pi}{7}\right)$
* $\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) = -\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$

$\Sigma = -\Sigma'$

1) $S = S'$ et $\Sigma = -\Sigma'$

2) $S + S' + i(\Sigma + \Sigma') = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7} + \cos\frac{12\pi}{7}$

$+ i\sin\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{8\pi}{7} + i\sin\frac{10\pi}{7} + i\sin\frac{12\pi}{7}$

$= e^{2i\pi/7} + e^{4\pi i/7} + e^{6i\pi/7} + e^{8i\pi/7} + e^{10i\pi/7} + e^{12i\pi/7}$

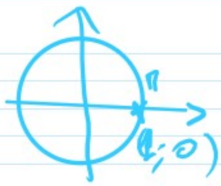
$= z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$ la somme des 1ers termes d'une suite géométrique de 1er terme z et de raison z.

$\times z$: $z + z^2 + \dots + z^6 = \text{somme}$

$z^2 + z^3 + \dots + z^7 = z \times \text{somme}$

$L_1 - L_2 = z - z^7 = \text{somme} - z \times \text{somme} = \text{somme} \times (1 - z)$

$\frac{z - z^7}{1 - z} = \text{somme}$ car $z \neq 1$



$e^{2i\pi} = 1$

donc ici $S + S' + i(\Sigma + \Sigma') = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = \frac{z - z^7}{1 - z} = \frac{e^{2i\pi/7} - \left(e^{2i\pi/7}\right)^7}{1 - e^{2i\pi/7}}$

$= \frac{e^{2i\pi/7} - e^{2i\pi}}{\dots} = \frac{e^{2i\pi/7} - 1}{\dots}$ ~ numérateur et dénominateur

$$= \frac{e^{2i\pi/7} - e^{2i\pi}}{1 - e^{2i\pi/7}} = \frac{e^{2i\pi/7} - 1}{1 - e^{2i\pi/7}}$$ numérateur et dénominateur opposés

$= -1$

or $S = S'$ et $\Sigma = -\Sigma'$ donc $\underbrace{S+S'} + i(\Sigma + \Sigma') = \underbrace{2S} + i \times 0 = 2S$

$2 \times S = -1$

$S = -\frac{1}{2}$

Produit scalaire

vendredi 29 mai 2020 11:41

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \\ z-z' \end{pmatrix}$

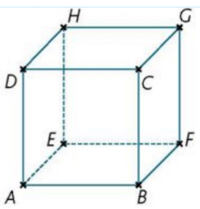
et $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2 + x'^2+y'^2+z'^2 - \left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)\right)$

en développant et en utilisant $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, on obtient $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Exercice 63 page 312.

63. Soit le cube *ABCDEFGH* de l'exercice 62.

1. Montrer que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$, puis que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
2. En déduire la position relative de la droite (*AG*) et du plan (*BED*).
3. En se plaçant dans le repère $(D\,;\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$, déterminer les coordonnées des points *A*, *B*, *D*, *E* et *G*.
4. Avec les coordonnées, démontrer que la droite (*AG*) est orthogonale au plan (*BED*).



1) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE} = (\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG}).\overrightarrow{BE}$ grâce à la relation de Chasles.

$= \underbrace{\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BE}}_{=0} + \overrightarrow{FG}.\overrightarrow{BE}$

car les diagonales (AF) et (BE) du carré sont perpendiculaires

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FG}.\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FG}.(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE})$

$= \underbrace{\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{BF}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{FE}}_{0} = 0$

$(FG)\perp(BF)$ et $(FG)\perp(FE)$

2) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}).\overrightarrow{BD}$

$= \underbrace{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}}_{0} + \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{BD}$

car diag de carré

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CG}.(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$

$= \underbrace{\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{BC}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CD}}_{0} = 0$

2) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE} = 0$ donc $(AG)\perp(BE)$
$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = 0$ donc $(AG)\perp(BD)$
$\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont non colinéaires

Donc (AG) est orthog à 2 droites sécantes du plan (BED) : elle est donc orthogonale au plan (BED)

3) dans $(D\,;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$, $A(1;0;0)$ $B(1;1;0)$ $C(0;1;0)$
$D(0;0;0)$ $E(1;0;1)$ et $G(0;1;1)$

4) $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-1 \\ 1-0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE} = xx'+yy'+zz' = (-1)\times 0 + 1\times(-1) + 1\times 1 = 0$

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = (-1)\times(-1) + 1\times(-1) + 1\times 0 = 0$

$AG \cdot BE = xx' + yy' + zz' = (-1) \times (0) + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$

$\vec{AG} \cdot \vec{BD} = (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) + 1 \times 0 = 0$.

même raisonnement qu'en quest° 2 pour démq (AG) est orthogonale au plan (BED)