Page 1 : exercices

mardi 31 mars 2020 10:07

Rituel : $\displaystyle\int_{2,5}^{5} x e^{x^2}\,dx$ $\qquad \int u' e^u = e^u$

⚠ $e^{x^2} = \exp(x^2) \neq (e^x)^2$

On pose $u(x) = x^2$, on calcule $u'(x) = 2x$

$$\int_{2,5}^{5} x e^{x^2}\,dx = \int_{2,5}^{5} \frac{1}{2} \times \boxed{2x} e^{x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2} \times e^{x^2}\right]_{2,5}^{5} = \frac{1}{2} e^{25} - \frac{1}{2} e^{6,25} = \frac{1}{2}\left(e^{25} - e^{6,25}\right)$$

⚠ $\dfrac{\exp a}{\exp b} = \exp(a-b)$

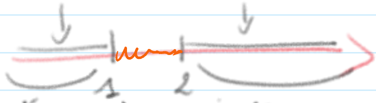
Ex 50 page 397 $\quad X \sim \mathcal{N}(0;1)$ $\quad \boxed{P(X \leq 1) = 0,84}$ $\quad \boxed{P(X \leq 2) = 0,98}$ à 10^{-2} près.

1) $P\big((X \leq 1) \cup (X > 2)\big) = P(X \leq 1) + P(X > 2) - 0$ car $(X \leq 1)$ et $(X > 2)$ sont disjoints ou incompatibles

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

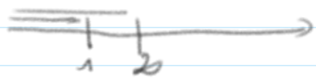
$(X > 2)$ et $(X \leq 2)$ sont des évènements contraires donc $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,98 = 0,02$

$P\big((X \leq 1) \cup (X > 2)\big) = 0,84 + 0,02.$

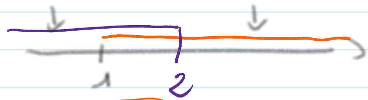


2) $P\big((X \leq 1) \cap (X > 2)\big) = 0$ car les évènements sont disjoints

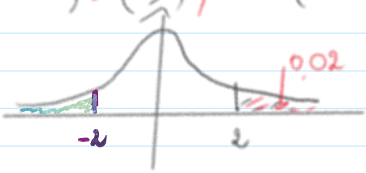
3) $P\big((X \leq 1) \underset{\text{et}}{\cap} (X \leq 2)\big) = P(X \leq 1) = 0,84$



4) $P\big((X > 1) \underset{\text{ou}}{\cup} (X \leq 2)\big) = 1$



5) $P\big((X < -2) \cup (X > 1)\big) = P(X < -2) + \boxed{P(X > 1)} - 0 = 0,02 + \boxed{0,16} = 0,18$



car $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

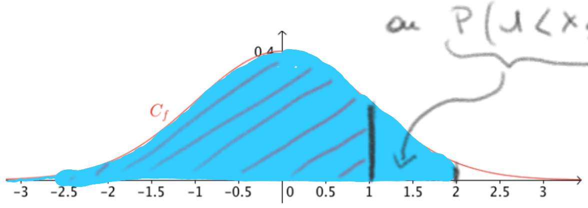
$\boxed{P(X > 1)} = 1 - P(X \leq 1)$ car évènements contraires $= 1 - 0,84 = 0,16$

6) $P(1 < X \leq 2) = 1 - \underbrace{0,86}_{} = 0,14$

cf question 1 car évènements contraires.

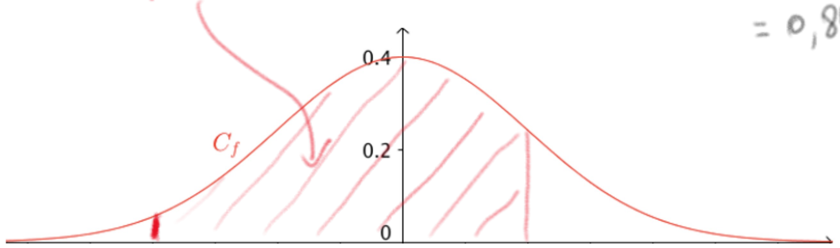
ou $P(1 < X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1)$

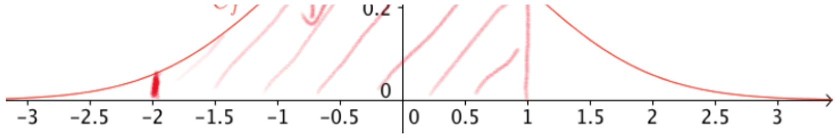
$= 0,98 - 0,84 = 0,14$



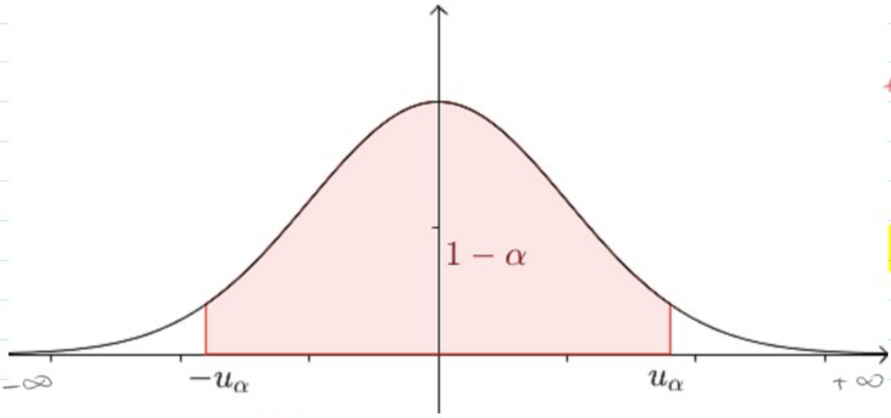
7) $\underbrace{P(-2 < X \leq 1)}_{} = P\big((-2 < X) \text{ et } (X \leq 1)\big) = P(X \leq 1) - P(X \leq -2)$

$= 0,84 - 0,02 = 0,82.$




0.2
0
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

X est une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite
$X \sim \mathcal{N}(0;1)$
Pour tout réel α de $]0;1[$, il existe un unique réel positif, noté u_α, tel que :
$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1-\alpha$



1) $0 < \alpha < 1$
$\times(-1)$ $0 > -\alpha > -1$ $\times(-1)$
$-1 < -\alpha < 0$
$+1$ $0 < 1-\alpha < 1$ $+1$

2) On pose :

$G(t) = P(-t \leq X \leq t)$ avec $t \geq 0$

$= 2 \times P(0 \leq X \leq t)$
par symétrie de la courbe de la fonction de densité

donc $G(t) = 2 \times \int_0^t f(x)\,dx$

G est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ car f est continue sur $\mathbb{R}$.

$G'(t) = 2 \times f(t)$ strictement positive

t	0	u_α	$+\infty$
signe de $G'(t)$		$+$	
variation de G	0	$\nearrow$ * $1-\alpha$ $\nearrow$	1

$G(0) = 2 \times \int_0^0 f(x)\,dx = 0$

$\lim_{t \to +\infty} G(t) = \lim_{t \to +\infty} P(-t \leq X \leq t) = 1$

l'aire totale sous la courbe vaut 1

3) G est continue sur $\mathbb{R}^+$ car G est dérivable sur $\mathbb{R}^+$
G est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
$1-\alpha$ appartient à l'intervalle image de $]0;+\infty[$ par G * qui est $]0;1[$
d'après le corollaire du TVI, il existe une unique solution à l'équation $G(t) = 1-\alpha$, notée u_α avec $0 < u_\alpha$

ex : $u_{\boxed{0,01}} \approx 2,58$ car $\boxed{\alpha} = 0,01$ donc $1-\alpha = 0,99$