L'espace est muni d'un repère orthonormal.

Théorème 4.

Dans une base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$,
si $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y'; z')$ alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.

Exemple

Dans un cube $ABCDEFGH$, les droites (EC) et (BG) sont-elles orthogonales ? perpendiculaires ?

Propriété 5.

Dans une base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$,
si $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ alors : $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Théorème 6.

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ et tout réel λ, on a les propriétés de

- Symétrie : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
- Homogénéité : $(\lambda \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot (\lambda \overrightarrow{v})$
- Bilinéarité : $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$.

Egalités remarquables

$$
\begin{aligned}
(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\\
(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\\
(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) &= \|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2
\end{aligned}
$$

On en déduit une nouvelle définition du produit scalaire :

Définition 7.

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right).$$

Propriété 7.

Si dans une base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$,
$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ équivaut à $x = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{i}$ et $y = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{j}$ et $z = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{k}$.

Propriété 8.

Deux droites sont orthogonales si et seulement si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

Avec $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y'; z')$,

$$\boxed{\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \iff xx' + yy' + zz' = 0}$$

Propriété 9.

Une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et un plan $\mathcal{P}$ sont orthogonaux si et seulement s'il existe deux vecteurs $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ non colinéaires du plan $\mathcal{P}$ tels que

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\imath} = 0 \text{ et } \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\jmath} = 0\,.$$

Propriété 10.

Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

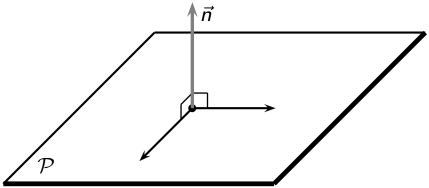
Preuve explicitement au programme...

Remarque

Si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
Par contraposée, si une droite d'un plan P n'est pas orthogonale à une droite D alors D n'est pas orthogonale à P.

Définition 8.

Un *vecteur normal* $\vec{n} \neq \vec{0}$ d'un plan $\mathcal{P}$ est un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.
Par bilinéarité du produit scalaire, $\vec{n}$ est orthogonal à tous les vecteurs du plan.



Exemple

$ABCDEFGH$ est un cube.
Démontrer que $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE).

Propriété 11.

Soient deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ des vecteurs normaux respectifs à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont **perpendiculaires** lorsque $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont orthogonaux.

Découle de la définition de deux plans perpendiculaires.

Théorème 12.

Soit le plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et soit un point M de l'espace.

$$\boxed{M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0}$$

Théorème 13.

Dans un repère orthonormé,

(1) Un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

(2) Réciproquement, a, b, c et d étant quatre réels avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

(*Explicitement au programme.*)