Produit scalaire dans l'espace

1. Les différentes expressions du produit scalaire

1.1. Définitions

Définition 1.

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace et trois points A, B et C de l'espace tels que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$.
Il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ contenant les points A, B et C.
Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$, est le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan $\mathcal{P}$.

Remarque 1. *Le produit scalaire ne dépend pas des représentants, il ne dépend que des vecteurs : il peut se calculer avec les normes des vecteurs.*

Définition 2.

Le *produit scalaire* des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le **nombre réel** :
$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}||^2+||\overrightarrow{v}||^2-||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2\right)$.
D'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ se lit « $\overrightarrow{u}$ scalaire $\overrightarrow{v}$ ».

Remarque 2. *Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire est nul.*

Définition 3.

On appelle carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{u}$ le nombre $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}$, noté $\overrightarrow{u}^2$: $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}^2=||\overrightarrow{u}||^2$.

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=0\Longleftrightarrow\overrightarrow{u}=\vec{0}$

Remarque 3. *Si A et B sont deux points quelconques, $\overrightarrow{AB}^2=||\overrightarrow{AB}||^2=AB^2$.*

1.2. Autres expressions du produit scalaire de deux vecteurs non nuls

Avec le cosinus

Définition 4.

si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls, soit A un point de l'espace et B, C les points définis par $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$, on a :
$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})=||\overrightarrow{u}||\times||\overrightarrow{v}||\times\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.

Indépendance des représentants car conservation des angles par translation

Vecteurs orthogonaux : Dans l'espace, dire que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** signifie que si $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{CD}$, alors les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.*Par convention :* **le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur**.
Lorsque deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux on note $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$.

Propriété 1.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$est nul.
Soit : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$ équivaut à $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ ou $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=\dfrac{\pi}{2}$.

Vecteurs colinéaires : expression simplifiée du produit scalaire
Convention : **Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur**.

Propriété 2.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires.
- Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls et de même sens, alors on a : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=||\overrightarrow{u}||\times||\overrightarrow{v}||$.
- Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls et sens contraire, alors on a : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-||\overrightarrow{u}||\times||\overrightarrow{v}||$.

Avec le projeté orthogonal

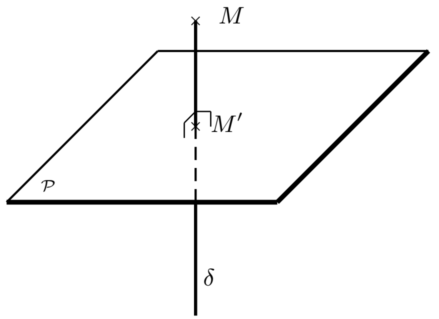
.

Définition 5.

Projeté d'un point sur un plan. Soient dans l'espace
- un plan $\mathcal{P}$,
- un point M,
- la droite δ passant par le point M et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$,
- le point M' intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite δ.

Le point M' est appelé **le projeté orthogonal** du point M sur le plan $\mathcal{P}$.

Remarque : de tous les points du plan $\mathcal{P}$, le point M' est alors le plus proche de M (penser au théorème de Pythagore).

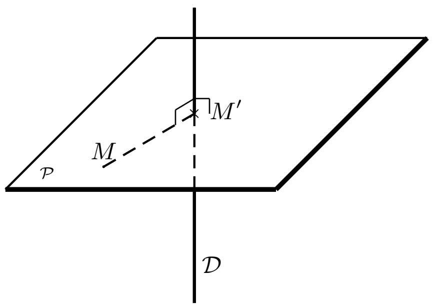


Définition 6.

Projeté d'un point sur une droite. Soient dans l'espace
- une droite $\mathcal{D}$,
- un point M,
- le plan $\mathcal{P}$ passant par le point M et perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$,
- le point M' intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

Le point M' est appelé **le projeté orthogonal** du point M sur la droite $\mathcal{D}$.

Remarque : de tous les points de la droite $\mathcal{D}$, le point M' est alors le plus proche de M



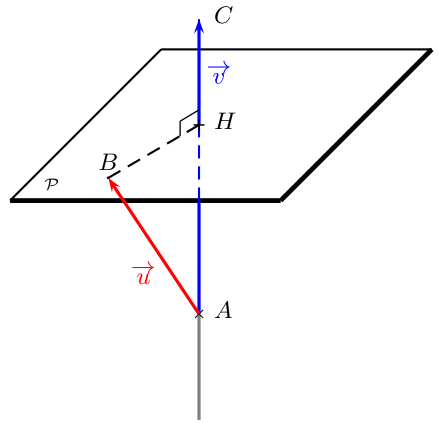
Exemple 1. *$ABCDEFGH$ est un cube. Déterminer le projeté orthogonal du point A sur la droite (HC).*

Propriété 3.

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs ($\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$), soit A un point de l'espace et B, C les points définis par $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, en notant H le projeté orthogonal de B sur (AC). Alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Pour $\overrightarrow{u}$ vecteur directeur unitaire (norme 1) de (AC) : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u} = \pm AH$.



Remarque 4. *Intérêt :*
- *Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AH \times AC$*
- *Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AH \times AC$*

2. Expression analytique du produit scalaire

L'espace est muni d'un repère orthonormal.

Théorème 4.

Dans une base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$,
si $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y'; z')$ alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.

Exemple 2. *Dans un cube $ABCDEFGH$, les droites (EC) et (BG) sont-elles orthogonales ? perpendiculaires ?*

Propriété 5.

Dans une base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$,
si $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ alors : $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

3. Propriétés du produit scalaire

Théorème 6.

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ et tout réel λ, on a les propriétés de
- Symétrie : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
- Homogénéité : $(\lambda\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot (\lambda\overrightarrow{v})$
- Bilinéarité : $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$.

Preuve. *La symétrie est évidente, l'homogénéité, la bilinéarité se prouvent en écrivant chaque membre en coordonnées cartésiennes.*

Egalités remarquables :

$$\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})^2 &= \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}\\ (\vec{u}-\vec{v})^2 &= \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}\\ (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) &= \|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

On en déduit une nouvelle définition du produit scalaire :

Définition 7.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right).$$

Propriété 7.

Si dans une base orthonormale $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ équivaut à $x=\vec{u}\cdot\vec{i}$ et $y=\vec{u}\cdot\vec{j}$ et $z=\vec{u}\cdot\vec{k}$.

4. Orthogonalité dans l'espace

4.1. Droites orthogonales, droite et plan orthogonaux.

Propriété 8.

Deux droites sont orthogonales si et seulement si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

Avec $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$,

$$\boxed{\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \iff xx'+yy'+zz'=0}$$

Définition 8.

Dire que deux plans sont **perpendiculaires** signifie que l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

Propriété 9.

Une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan $\mathcal{P}$ sont orthogonaux si et seulement s'il existe deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires du plan $\mathcal{P}$ tels que

$$\vec{u}\cdot\vec{i}=0 \text{ et } \vec{u}\cdot\vec{j}=0\,.$$

Propriété 10.

Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

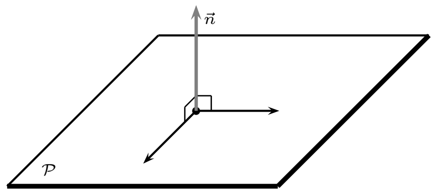
Preuve explicitement au programme...

Remarque 5. *Si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.*
Par contraposée, si une droite d'un plan P n'est pas orthogonale à une droite D alors D n'est pas orthogonale à P.

4.2. Vecteur normal à un plan et plans perpendiculaires.

Définition 9.

Un *vecteur normal* $\vec{n}\neq\vec{0}$ d'un plan $\mathcal{P}$ est un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.
Par bilinéarité du produit scalaire, $\vec{n}$ est orthogonal à tous les vecteurs du plan.



Exemple 3. *$ABCDEFGH$ est un cube.*
Démontrer que $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE).

Propriété 11.

Soient deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ des vecteurs normaux respectifs à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont **perpendiculaires** lorsque $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.

Découle de la définition de deux plans perpendiculaires.

4.3. Équation cartésienne de plan

Théorème 12.

Soit le plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ et soit un point M de l'espace.

$$\boxed{M\in\mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0}$$

Théorème 13.

Dans un repère orthonormé,
(1) Un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$.
(2) Réciproquement, a, b, c et d étant quatre réels avec $(a;b;c)\neq(0;0;0)$, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.

(Explicitement au programme.)

Exemple 4. *Donner un vecteur normal à $\mathcal{P}: y+z=0$.*

Méthode 1. Déterminer une équation d'un plan à partir d'un point et d'un vecteur normal

Exemple 5. *Déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}'$ de vecteur normal $\vec{n}(2;-1;0)$ passant par $K(1;1;1)$.*

Méthode 2. Critères d'orthogonalité et de parallélisme
Deux plans sont perpendiculaires si et seulement s'ils ont des vecteurs normaux orthogonaux.
Deux plans sont parallèles si et seulement s'ils ont des vecteurs normaux colinéaires.
Deux droites sont orthogonales si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs orthogonaux.
Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.
Une droite et un plan sont orthogonaux si et seulement si un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal du plan sont colinéaires.
Une droite et un plan sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal du plan sont orthogonaux.

Exemple 6.

1. *Représentation paramétrique de la perpendiculaire à $\mathcal{P} : y+z=0$ contenant $K(1;1;1)$?*
2. *Équation cartésienne du plan $\mathcal{P}''$ parallèle à $\mathcal{P}' : x-2y+z=0$ passant par $A(1;0;0)$?*
3. *Équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'''$ perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}''$ passant par $A(1;0;0)$?*
4. *Équation cartésienne du plan médiateur de $[AB]$: $A(1;2;3)$ et $B(-1;0;-1)$?*

$\boxed{AP}$ *(propositions du programme) :*

1. *Étudier l'intersection de trois plans.*
2. *Perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires.*