De la loi binomiale à la loi normale

Partie A : Variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(30\,;\,0,3)$

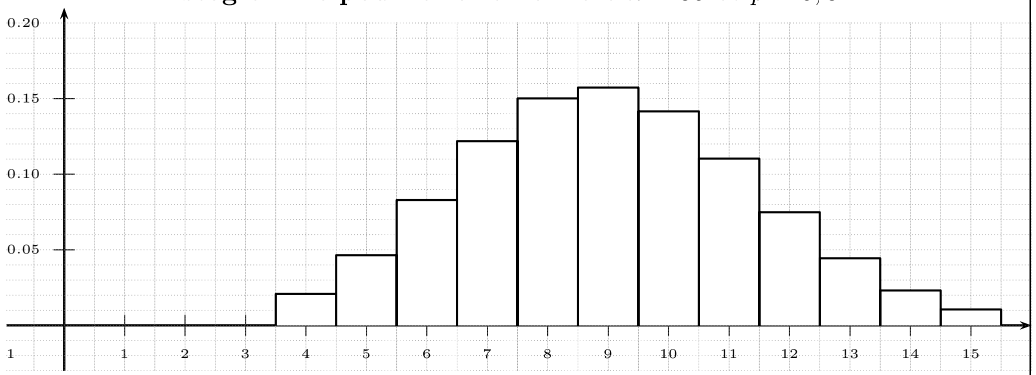
1. L'espérance de X vaut $\mu = 30 \times 0,3 = 9$ et l'écart-type de X vaut :
   $\sigma = \sqrt{30 \times 0,3 \times 0,7} = \sqrt{6,3} \approx 2,5$.

2. **Loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,3$**

k	$\cdots$	4	5	6	7	8	9
$\mathrm{p}(X_n = k)$	$\cdots$	0,02	0,05	0,08	0,12	0,15	0,16

k	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
$\mathrm{p}(X_n = k)$	0,14	0,11	0,07	0,04	0,02	0,01	$\cdots$

Histogramme pour la loi binomiale $n = 30$ et $p = 0,3$.



3. La somme des aires des rectangles si on avait représenté tous les rectangles possibles serait égale à 1.

Partie B : Variable aléatoire $Y = X - \mu$

On s'intéresse à présent à la variable aléatoire Y telle que : $Y = X - \mu$, où X est la variable aléatoire de la partie A et μ est l'espérance de X.

1. Tableau de la figure 3.

k	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0
$\mathrm{p}(Y = k)$	$\cdots$	0,02	0,05	0,08	0,12	0,15	0,16

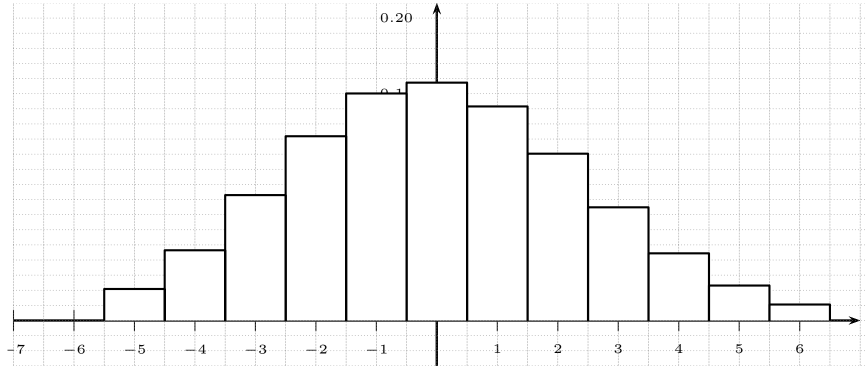
k	1	2	3	4	5	6	7
$\mathrm{p}(Y = k)$	0,14	0,11	0,07	0,04	0,02	0,01	$\cdots$

2. Histogramme de la loi de probabilité de Y sur le graphique de la figure 3.

3. L'espérance de Y vaut 0 et l'écart-type vaut σ

Partie C : Variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

On s'intéresse à présent à la variable aléatoire Z telle que : $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, où X est la variable aléatoire de la partie A, μ est l'espérance de X et σ est l'écart type de X.



1. Tableau de la figure 4. (*on arrondira les valeurs de k au centième*).

k	$\cdots$	-1.99	-1.59	-1.2	-0.8	-0.4	0
$\mathrm{p}(Z = k)$	$\cdots$	0,02	0,05	0,08	0,12	0,15	0,16

k	0,40	0,80	1,20	1,59	1,999	2,39	
$\mathrm{p}(Z = k)$	0,14	0,11	0,07	0,04	0,02	0,01	$\cdots$

2. (a) La différence entre deux valeurs successives de la variable aléatoire est constante vaut $\frac{1}{\sigma}$.

   (b) Second tableau de la figure 4 .

k	$\cdots$	$-1,99$	$-1,59$	$-1,20$	$-0,80$	$-0,40$	0	0,40	0,80	1,20
Aire du rectangle	$\cdots$	0,02	0,05	0,08	0,12	0,15	0,16	0,14	0,11	0,07
Hauteur du rectangle	$\cdots$	0,05	0,125	0,20	0,30	0,38	0,40	0,35	0,28	0,18

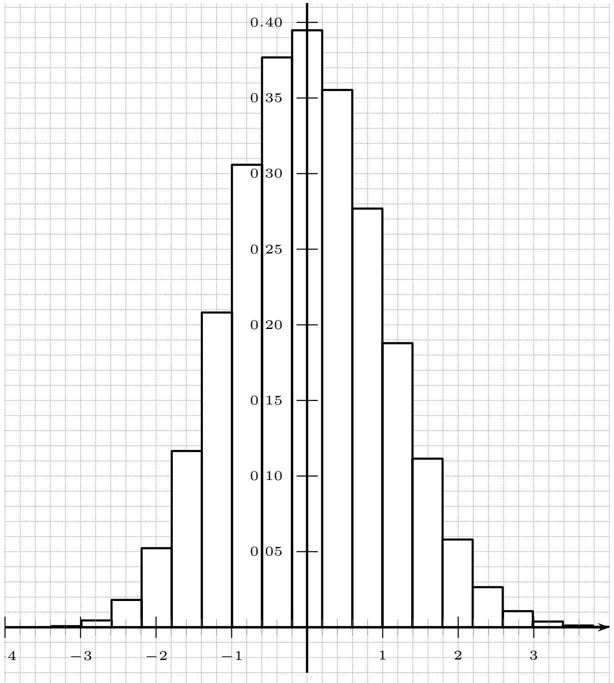
k	1,59	1,99	2,39	$\cdots$
Aire du rectangle	0,04	0,02	0,01	$\cdots$
Hauteur du rectangle	0,10	0,05	0,025	$\cdots$

(c) Second tableau de la figure 4 .

k	$\cdots$	$-1,99$	$-1,59$	$-1,20$	$-0,80$	$-0,40$	0	$0,40$	$0,80$	$1,20$	$1,59$	$1,99$	$2,39$	$\cdots$
Aire du rectangle	$\cdots$	$0,02$	$0,05$	$0,08$	$0,12$	$0,15$	$0,16$	$0,14$	$0,11$	$0,07$	$0,04$	$0,02$	$0,01$	$\cdots$
Hauteur du rectangle	$\cdots$	$0,05$	$0,125$	$0,20$	$0,30$	$0,38$	$0,40$	$0,35$	$0,28$	$0,18$	$0,10$	$0,05$	$0,025$	$\cdots$

(d) Graphique de la figure 4. avec l'histogramme de la loi Z.

Graphique



3. L'espérance de Y vaut 0 et l'écart-type vaut 1.

Partie D : Pour d'autres valeurs de n

Le même travail a été fait sur ordinateur dans les cas où n vaut 50 et 200 et le résultat est sur la figure .

On peut constater que plus n augmente, plus le graphique évoque une « cloche ». L'histogramme est limité par l'axe des abscisses et une ligne brisée qui, lorsque n augmente, tend à se confondre avec la représentation graphique d'une fonction f. Le mathématicien Abraham de Moivre a découvert que cette courbe est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Figure 1 – Loi binomiale – Derniers histogrammes

$n = 50$ $\qquad$ $n = 200$