De la loi binomiale à la loi normale

Partie A : Variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(30\,;\,0,3)$

On donne sur la figure 1, pour $n = 30$ et $p = 0,3$, les valeurs approchées des probabilités de cette loi *(seulement celles supérieures à 10^{-2}, les autres ayant été négligées)* ainsi qu'une représentation graphique en bâtons.

1. Calculer l'espérance μ et l'écart-type σ de X.
2. Représenter dans le repère de la figure 2. l'histogramme où chaque rectangle :
   - est centré sur les différentes valeurs que peut prendre la variable aléatoire ;
   - a sa largeur égale à la différence entre deux valeurs successives de la variable aléatoire *(soit ici une unité)* ;
   - a son aire égale à la probabilité *(donc, ici, sa hauteur est égale à la probabilité)*.
3. Que vaudrait la somme des aires des rectangles si on avait représenté tous les rectangles possibles *(pas seulement ceux correspondant à une probabilité supérieure à 10^{-2})* ?

Partie B : Variable aléatoire $Y = X - \mu$

On s'intéresse à présent à la variable aléatoire Y telle que : $Y = X - \mu$, où X est la variable aléatoire de la partie A et μ est l'espérance de X.

1. Compléter le tableau de la figure 3.
2. Représenter l'histogramme de la loi de probabilité de Y sur le graphique de la figure 3.
3. Déterminer l'espérance et l'écart-type de Y. Que constate-t-on ?

Partie C : Variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

On s'intéresse à présent à la variable aléatoire Z telle que : $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, où X est la variable aléatoire de la partie A, μ est l'espérance de X et σ est l'écart type de X.

1. Compléter le tableau de la figure 4. (*on arrondira les valeurs de k au centième*).
2. On rappelle que chaque rectangle de l'histogramme :
   - est centré sur les différentes valeurs que peut prendre la variable aléatoire ;
   - a sa largeur égale à la différence entre deux valeurs successives de la variable aléatoire ;
   - a son aire égale à la probabilité.

   (a) Vérifier que la différence entre deux valeurs successives de la variable aléatoire est constante.
   Cette vérification peut se faire à partir des valeurs approchées successives de la variable aléatoire mais surtout, plus sûrement, à partir des valeurs exactes de cette variable aléatoire.

   (b) Compléter alors le second tableau de la figure 4 .

   (c) Compléter alors le graphique de la figure 4. avec l'histogramme de la loi Z.
3. Déterminer l'espérance et l'écart-type de Z. Que constate-t-on ?

Partie D : Pour d'autres valeurs de n

Le même travail a été fait sur ordinateur dans les cas où n vaut 50 et 200 et le résultat est sur la figure .

On peut constater que plus n augmente, plus le graphique évoque une « cloche ». L'histogramme est limité par l'axe des abscisses et une ligne brisée qui, lorsque n augmente, tend à se confondre avec la représentation graphique d'une fonction f. Le mathématicien Abraham de Moivre a découvert que cette courbe est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Figure 1 – Loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,3$

k	$\cdots$	4	5	6	7	8	9
$p(X_n = k)$	$\cdots$	$0,02$	$0,05$	$0,08$	$0,12$	$0,15$	$0,16$

k	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
$p(X_n = k)$	$0,14$	$0,11$	$0,07$	$0,04$	$0,02$	$0,01$	$\cdots$

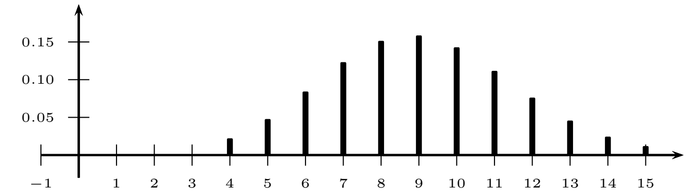

Figure 2 – L'histogramme de la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,3$

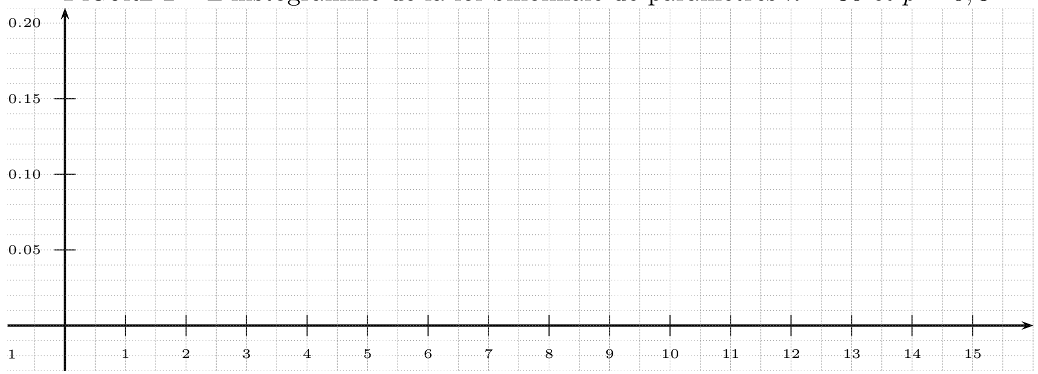

Figure 3 – Y

k	$\cdots$						
$p(Y = k)$	$\cdots$	$0,02$	$0,05$	$0,08$	$0,12$	$0,15$	$0,16$

k							
$p(Y = k)$	$0,14$	$0,11$	$0,07$	$0,04$	$0,02$	$0,01$	$\cdots$

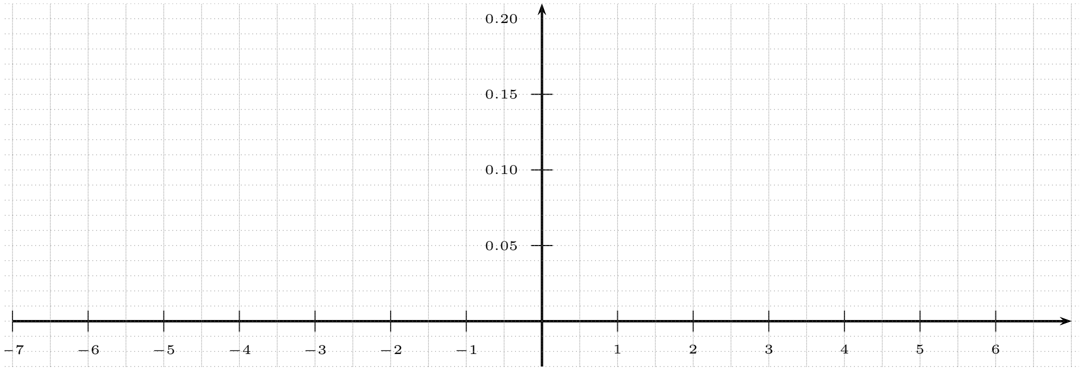

Figure 4 – Z

Premier tableau

k	$\cdots$						
$p(Z = k)$	$\cdots$	$0,02$	$0,05$	$0,08$	$0,12$	$0,15$	$0,16$

k							
$p(Z = k)$	$0,14$	$0,11$	$0,07$	$0,04$	$0,02$	$0,01$	$\cdots$

Second tableau

k	$\cdots$										
Aire du rectangle	$\cdots$	$0,02$	$0,05$	$0,08$	$0,12$	$0,15$	$0,16$	$0,14$	$0,11$	$0,07$	$0,04$
Hauteur du rectangle	$\cdots$										

k			$\cdots$
Aire du rectangle	$0,02$	$0,01$	$\cdots$
Hauteur du rectangle			$\cdots$

Graphique

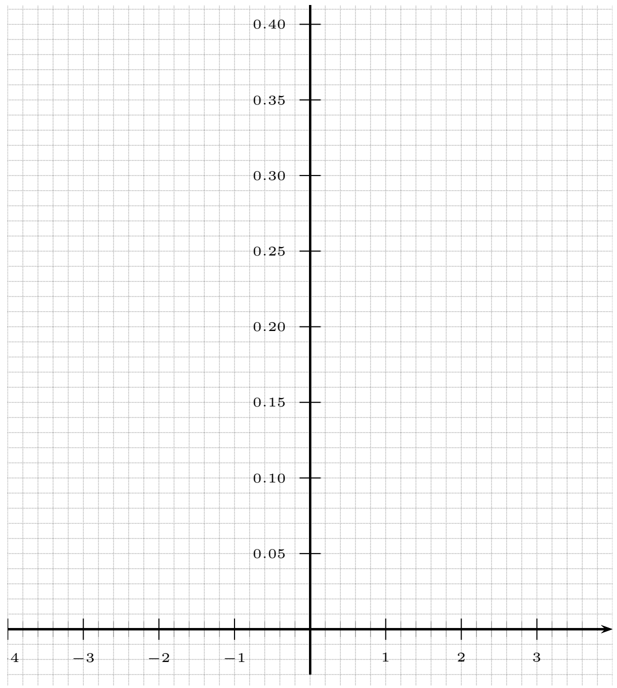

Figure 5 – Loi binomiale – Derniers histogrammes