Exponentielle complexe

1. Forme exponentielle d'un nombre complexe

1.1. La formule d'Euler

Notation
Le nombre $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ est noté $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ donc tout nombre complexe peut s'écrire sous la **forme exponentielle** $\boxed{z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.
L'égalité suivante est appelée la **formule d'Euler** :

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}.$$

Exemples :
- Si $z = 3\,\mathrm{i}$ alors $|z| = 3$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ donc $z = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.
- $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}.$
- Si $z = 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ alors $|z| = 2$ et $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}$ donc $z = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$.

1.2. Calculs avec les formes exponentielles

La forme exponentielle des nombres complexes se manipule de la même façon que la fonction exponentielle (on utilisera donc les propriétés des puissances).

Propriété 1.

$\boxed{\overline{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}$

$\boxed{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = rr'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}}$ $\boxed{(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}$

$\boxed{\dfrac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}$ $\boxed{\dfrac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \dfrac{r}{r'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}}$

Exemples :
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}.\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x+(-\mathrm{i}x)} = \mathrm{e}^0 = 1.$
- Si $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ et $z' = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ alors $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{2}{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\frac{\pi}{3})} = \dfrac{2}{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.
- $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$, de plus, comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$
  alors on obtient $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}))$
  donc $\cos(\frac{7\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3})$ et $\sin(\frac{7\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})$.
- Résoudre l'équation $z^2 = 4\mathrm{i}$.
  Résolution :
  Posons $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, alors,
  $z^2 = 4\mathrm{i}$ SSI $r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ SSI $r^2 = 4$ et $2\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ SSI $r = 2$ et $\theta = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.
  L'équation a donc deux solutions : $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}$ et $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i}$.

2. Formules d'Euler et de Moivre

2.1. Formules d'Euler

La formule d'Euler vue plus haut permet une interprétation des fonctions sinus et cosinus que l'on appelle parfois aussi formules d'Euler.

Propriété 2.

Formules d'Euler : pas explicitement au programme mais très utile.

$\boxed{\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}}$ $\boxed{\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}}$

Application : linéariser (transformation de produits ou de puissances de cosinus et de sinus en une somme) pour trouver des primitives ...

2.2. Formule de Moivre

Propriété 3.

Formule de Moivre
Soit θ un réel quelconque et n un entier naturel. Alors : $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$

(Preuve immédiate).

Remarque 1. Ceci s'écrit aussi $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\theta)}$.
- **En déduire les formules d'addition et de duplication de la trigonométrie.**
- Appliquer la formule avec $n = 3$.