2. Géométrie analytique dans l'espace

2.1. Repérage dans l'espace

Définition 3.

Un repère de l'espace est la donnée d'un point origine O et de trois vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ non coplanaires. On note alors $(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{k}\,)$ ce repère. *Les repères peuvent être quelconques, orthogonaux, orthonormaux.*

Propriété 8.

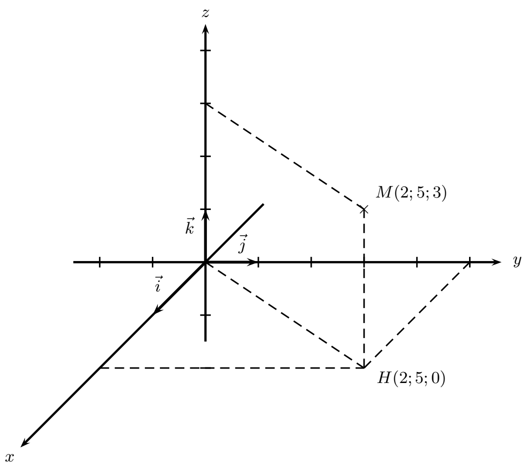
Soit un repère $(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{k}\,)$ de l'espace.
Pour tout point M, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de réels tels que $\overrightarrow{v} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$.

Définition 4.

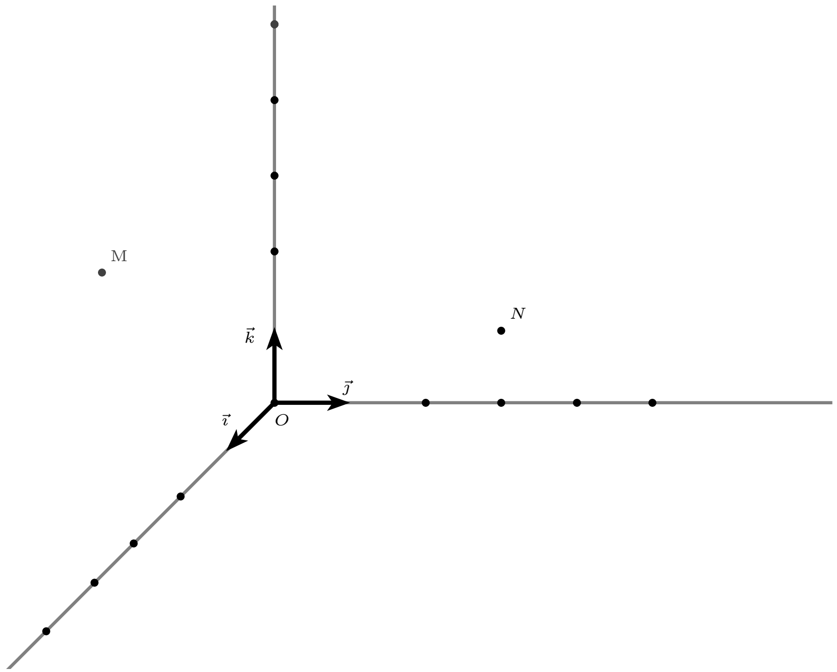
Ce triplet $(x; y; z)$ est alors appelé coordonnées, x **l'abscisse**, y **l'ordonnée** et z la **cote** du point M (resp. du vecteur $\overrightarrow{v}$) dans ce repère.

On note alors $M(x; y; z)$ d'une part, $\overrightarrow{v}(x; y; z)$ ou $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ d'autre part.

Application :



Exemple 1. Placer $P(1; 2; 3)$. Déterminer les coordonnées de M sachant que $z_M = 3$ et celles de N sachant que $x_N = 0$. Déterminer les coordonnées de Q tel que $PQNM$ soit un parallélogramme.



Théorème 9.

Dans l'espace, soient un repère $(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,; \overrightarrow{k}\,)$ et trois points $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ et $C(x_C; y_C; z_C)$, alors

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$;
- le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$;
- le centre de gravité du triangle ABC a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}; \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$;

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et un réel λ, alors

- le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$;
- le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$.