Géométrie dans l'espace

1. Vecteurs

1.1. Extension de la notion de vecteur à l'espace

On étend à l'espace la notion de vecteur définie dans le plan, ainsi que les opérations et propriétés associées vues en seconde et en première, d'égalité de deux vecteurs, de multiplication par un réel, de somme de deux vecteurs, de relation de Chasles, de vecteur directeur d'une droite. On rappelle :

- Dans l'espace, pour tout point A et tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.
- A, B, C et D étant quatre points de l'espace, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.
- La notion de colinéarité reste valable dans l'espace c'est-à-dire que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$, et tout vecteur est colinéaire au vecteur nul.

Propriété 1.

Soient A et B deux points distincts de l'espace.
La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe un réel k vérifiant $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
Rappel : on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

1.2. Vecteurs coplanaires

Propriété 2.

Caractérisation d'un plan
Soient dans l'espace, un point A et deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires.
L'ensemble des points M de l'espace tels que l'on a $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ où x et y sont des réels, est le plan (ABC), tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$.

Propriété 3.

Soit A, B, C et D quatre points de l'espace. S'il existe trois réels non tous nuls α, β et γ tels que $\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$ alors les quatre points A, B, C et D sont coplanaires.

Définition 1.

Dire que trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **coplanaires** signifie que les points A, B, C et D de l'espace qui vérifient $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$ appartiennent au même plan.

Propriété 4.

Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe trois réels non tous nuls α, β et γ tels que :

$$\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$$

Propriété 5.

Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires

si et seulement si

deux d'entre eux sont colinéaires ou s'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

Définition 2.

On dit alors que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dirigent le plan (ABC) ou qu'ils forment un couple de **vecteurs directeurs** du plan (ABC).

Propriété 6.

Utilisation : Droite parallèle à un plan
Soient A, B, C trois points non alignés et E et F deux points distincts. La droite (EF) est parallèle au plan (ABC) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires. Il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{EF}= x\ \overrightarrow{AB} +y\ \overrightarrow{AC}$.

Propriété 7.

Si deux plans sont dirigés par un même couple de vecteurs, alors ils sont parallèles.